



**Universidade Técnica de Lisboa**  
**Instituto Superior de Economia e Gestão**

720207/830



**Redes Neurais**  
**na**  
**Elaboração de Horários Escolares**

Marco Paulo dos Santos Carrasco

Dissertação para obtenção do grau de  
**Mestre em Matemática Aplicada à Economia e Gestão**

Realizada sob orientação da Professora  
**Margarida Gonçalves Vaz Pato**

Constituição do Júri das provas:  
**Professora Maria Teresa Nunes Chaves de Almeida**  
**Professora Margarida Gonçalves Vaz Pato**  
**Professora Helena Ramalhinho Dias Lourenço**



Dissertação apresentada como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre na área de Matemática Aplicada à Economia e Gestão no Instituto Superior de Economia e Gestão da Universidade Técnica de Lisboa

### *Agradecimentos*

Em primeiro lugar, a Professora Margarida Vaz Pato, orientadora da presente Tese, agradeço todas as sugestões e críticas, bem como a total disponibilidade demonstrada, durante a elaboração deste trabalho.

Aos colegas da E.S.G.H.T. da Universidade do Algarve, agradeço o apoio e a compreensão demonstrada, que me permitiu compatibilizar as funções docentes com a frequência do Curso de Mestrado.

Por último, um agradecimento muito especial a minha família e amigos pelo constante encorajamento e motivação na realização deste trabalho.

### **Resumo**

Na presente dissertação é analisado um problema de Elaboração de Horários Escolares em Instituições Escolares de nível secundário

Esta tarefa morosa, é frequentemente desenvolvida de uma forma manual num processo de "tentativa e erro", por um grupo de indivíduos que se baseiam no seu conhecimento dos recursos e condicionalismos da Instituição, bem como, na sua própria experiência recolhida em anos anteriores.

Faz-se uma revisão bibliográfica dos problemas afins ao problema e das diversas metodologias utilizadas na sua resolução.

São analisadas as Redes Neurais de Hopfield e a sua aplicação na resolução de problemas de optimização complexos. Neste contexto é proposta uma abordagem de resolução automatizada para o problema de Elaboração de Horários Escolares. É formalizado o problema e descritas as fases da sua implementação e resolução computacional.

São ainda apresentados e discutidos, os resultados computacionais resultantes da aplicação do algoritmo proposto a um problema de horários exemplificativo e a vários problemas pseudo-reais de pequena dimensão.

**Palavras chave:** Elaboração de Horários Escolares, Problemas de Optimização, Redes Neurais de Hopfield.

## Índice

	Pag
Introdução	1
1 O problema de Elaboração de Horarios Escolares	
1.1 Apresentação contextual do problema	3
1.2 Caracterização do problema	5
1.3 Formalização em P.N.L. Binaria	8
2 Revisão bibliográfica	
2.1 Introdução	13
2.2 Trabalhos relacionados com o problema de Elaboração de Horarios/Displinas Escolares	15
2.2 Trabalhos relacionados com o problema de Elaboração de um Calendario de Exames	32
3 Aplicação das redes neuronais na resolução de problemas de Elaboração de Horarios Escolares	
3.1. Introdução	39
3.2 Redes de Hopfield	44
3.3. Formalização do problema de Elaboração de Horarios Escolares em termos de Redes Neuronais de Hopfield	48
3.4. Implementação computacional	60
3.4.1. Considerações introdutórias	60
3.4.2. Descrição do algoritmo	61
3.4.3. Exemplo demonstrativo	69
3.4.3.1. Caracterização do problema	69
3.4.3.2. Resolução computacional	70
4. Aplicação do algoritmo a cenários pseudo-reais	
4.1. Descrição dos cenários	79
4.2. Resolução computacional e análise dos resultados	84
5 Conclusões	88

## *Introdução*

O processo de elaboração de horários nas instituições escolares em geral é uma tarefa periódica desenvolvida, pelo menos uma vez, no início de cada ano lectivo.

Para o efeito, é frequente a criação de um grupo formado por indivíduos com experiência anterior nesta tarefa, e com conhecimentos acerca dos recursos e condicionalismos inerentes a instituição em causa.

A complexa tarefa de elaboração de horários, desenvolve-se num processo de "tentativa e erro" até à formulação de um conjunto de horários globalmente satisfatórios.

A abordagem deste problema em termos de Investigação Operacional é bastante diversa, originando normalmente problemas de optimização complexos e de elevada dimensão, o que dificulta a sua resolução em termos práticos.

O recente interesse pela Teoria das Redes Neurais evidenciou algumas potencialidades das redes neuronais artificiais na resolução de problemas de optimização complexos, particularmente da rede neuronal de Hopfield

O objectivo deste trabalho é definir um modelo baseado numa rede neuronal que permita a resolução automatizada do problema de horários numa escola secundária com cerca de 2000 alunos, decomposto pelos diferentes ciclos e turnos.

No primeiro Capítulo, faz-se uma apresentação contextual do problema de Elaboração de Horários Escolares (E.H.E.) descrevendo as suas principais características. Em seguida propõe-se uma formalização do problema em termos de programação matemática com variáveis binárias.

No segundo Capítulo, apresenta-se uma revisão bibliográfica sobre as diversas abordagens dos problemas afins ao problema de (E.H.E.), nomeadamente, o problema de Elaboração de Horários/Disciplinas Escolares (E.H/D.E) e o problema de Elaboração de um Calendário de Exames (E.C.E.).

No terceiro Capítulo, faz-se uma introdução à Teoria das Redes Neurais, evidenciando a aplicação das redes neuronais de Hopfield na resolução de problemas de optimização. O problema de (E.H.E.) é reformulado em termos de uma rede neuronal de Hopfield, descrevendo-se a metodologia utilizada para a sua implementação e resolução

computacional. Apresenta-se ainda, a resolução detalhada de um problema de (E.H.E.) exemplificativo.

No quarto Capítulo, o algoritmo neuronal implementado é aplicado na resolução de vários cenários pseudo-reais de pequena dimensão para o problema de (E.H.E.), efectuando-se uma análise dos resultados computacionais obtidos.

Por último, no quinto Capítulo, apresentam-se conclusões acerca das potencialidades e limitações encontradas nesta abordagem de resolução neuronal do problema de (E.H.E.). Definem-se, ainda, orientações destinadas ao desenvolvimento de um sistema automatizado de elaboração de horários o qual já possa vir a ser utilizado numa instituição escolar.

## ***1. O Problema de Elaboração de Horários Escolares***

### ***1.1. Apresentação contextual do problema***

O processo de criação de horários escolares numa escola básica secundária, e em geral em qualquer instituição de ensino, é um problema comum que se coloca pelo menos uma vez por ano.

Tradicionalmente, a sua resolução é efectuada de uma forma manual, por uma equipa de indivíduos que durante um período mais ou menos longo procedem a definição dos horários com base na experiência acumulada de anos anteriores, bem como do conhecimento dos recursos disponíveis e condicionalismos inerentes a respectiva instituição.

Esta tarefa, frequentemente penosa e demorada, desenvolve-se segundo uma metodologia de “tentativa e erro” até à elaboração de uma solução globalmente satisfatória para o problema.

Se em algumas instituições a tarefa ainda não é muito complexa, na maioria dos casos a variabilidade dos recursos envolvidos (alunos, professores, salas, periodos disponíveis) é tão elevada, que o problema adquire uma dimensão dificilmente tratável por métodos puramente manuais. Nestes casos opta-se geralmente por adaptar, o mais possível, a solução aplicada em anos transactos.

Porém, o contínuo crescimento do número de alunos nas instituições, aliado as recentes reestruturações verificadas nos programas curriculares (introdução de novas disciplinas e maior liberdade na escolha de disciplinas opcionais) tornam o problema da criação de horários escolares cada vez mais complexo, o que obriga a uma modificação e adaptação dos sistemas de horários às novas realidades, rompendo definitivamente com as soluções passadas.

Paralelamente podemos verificar que devido ao acelerado desenvolvimento tecnológico no ramo da microinformática (reflectido na oferta de computadores progressivamente mais rápidos e com maior capacidade de armazenamento a preços cada vez mais atractivos), a maioria das escolas dispõe de um conjunto apreciável de recursos



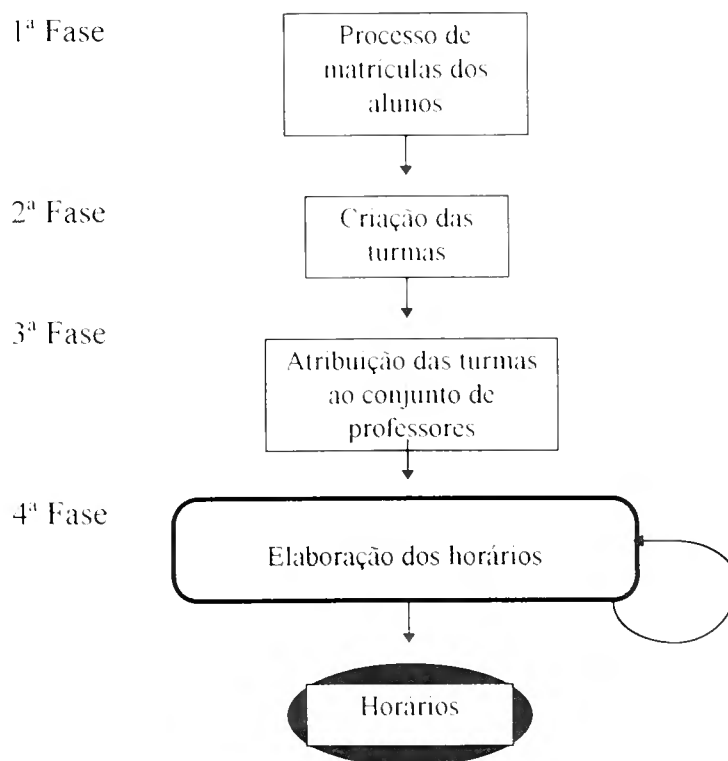
informáticos (microcomputadores ou mesmo em alguns casos computadores de médio/grande porte), que poderiam revelar-se valiosos quando utilizados na resolução do complexo problema de criação de horários escolares

Assim, nesta dissertação é definido um objectivo adicional de natureza prática que é o desenvolvimento de um modelo teórico abrangente e flexível para a elaboração de horários escolares, capaz no entanto de ser implementado computacionalmente no futuro, através de um programa de simples manipulação e pouco exigente em termos de recursos

Pretende-se a criação das bases de um software informático com potencial de adaptação a diferentes realidades existentes nas diversas instituições escolares, particularmente em escolas de ensino secundário, e que simultaneamente esteja ao alcance dos recursos informáticos e humanos disponíveis nessas próprias instituições

Na prática, o processo global de criação de horários numa escola secundaria segue uma metodologia que interessa, antes de tudo, descrever em termos gerais:

**Figura 1-1 - Processo global de criação de horários**



Após uma fase inicial de carácter meramente administrativo, no qual se efectuam as matrículas dos alunos, são criadas numa segunda fase todas as turmas tendo em conta as opções escolhidas pelos alunos e a dimensão ideal para o funcionamento normal das aulas

Numa terceira fase, é feita a atribuição ao nível dos Grupos de Ensino das turmas a cada um dos professores, de acordo com o plano curricular vigente, respeitando ainda a área de ensino e a carga horária semanal definida para cada docente. São deste modo fixados previamente os pares professor/turma relevantes para a definição dos horários. Por conveniência, daqui em diante, o termo disciplina, designará a associação entre um professor e uma turma. Assim, se o Professor 1 leccionar Matemática a Turma A e a Turma B, no nosso problema figurarão as Disciplinas 1A e 1B

Todas estas informações surgem como dados preliminares na elaboração e resolução do problema de horários - quarta fase

A última fase deste processo, consiste propriamente na criação dos horários. Vamos nesta dissertação concentrarmo-nos sobre esta fase, tentando substituir a aplicação da tradicional abordagem de "tentativa e erro" por um processo automatizado que permita uma rápida e eficiente elaboração de horários

## ***1.2. Caracterização do problema***

Um problema de Elaboração de Horários Escolares, abreviadamente (E H E ), pode ser genericamente definido como um problema em que se pretende encontrar uma solução constituída por um conjunto válido de horários, envolvendo alunos (agrupados em turmas), professores e salas numa sequência fixa de períodos horários (normalmente uma semana) e de forma a satisfazer restrições relativamente exigentes de natureza administrativa, educacional, logística, etc

Este tipo de problema, quando extraído de uma instituição de ensino secundário de média ou grande dimensão mesmo se considerado particionado em ciclos/turnos, apresenta um conjunto de restrições particularmente complexo e exigente de que vale a pena fazer uma especificação mais detalhada

É possível agrupar as restrições que dão validade aos horários em níveis de importância distintos. Assim por ordem decrescente de obrigatoriedade podemos definir três grupos de restrições: as obrigatórias, as de compatibilidade e as de melhoramento.

- (1º Grupo) - Restrições obrigatórias

Este conjunto rígido de restrições engloba as consideradas restrições de admissibilidade. A sua verificação é obrigatória, dado que a violação de qualquer destas restrições implicaria a existência de uma falha grave na solução. Nestas condições estão englobadas as seguintes restrições:

- uma disciplina ocupa exactamente uma sala, em cada período horário.
- cada professor só pode leccionar no máximo, uma disciplina (definida anteriormente como um par professor/turma), numa sala, em cada período horário.
- cada turma assiste no máximo a uma disciplina, em cada período horário.

A verificação simultânea destas duas últimas restrições evita os conflitos decorrentes da realização simultânea de aulas que envolvem professores ou alunos comuns. Essa situação surge, por exemplo, sempre que um professor é envolvido em diferentes disciplinas tornando-se necessário evitar a ocorrência simultânea dessas disciplinas. Por outro lado, existe também a necessidade de atender ao problema das disciplinas de opção que originam a criação de disciplinas com alunos provenientes de diversas turmas (é comum, por exemplo, nas disciplinas de Línguas a criação de disciplinas formadas por alunos de turmas distintas que optaram por determinado idioma). Esta situação obriga a que as disciplinas de opção não possam decorrer simultaneamente com outras disciplinas que envolvam as mesmas turmas.

- (2º Grupo) - Restrições de compatibilidade

Neste grupo de restrições são salvaguardados alguns aspectos particulares. A não verificação de alguma destas restrições implica o incumprimento de algum aspecto pontual considerado relevante, mas que não inviabiliza globalmente a solução encontrada.

Consideram-se as restrições seguintes:

- o número de horas semanais definido para cada disciplina deve ser respeitado, assim como, o número máximo de horas semanais leccionadas por cada docente.

- as salas são adequadas as exigências da disciplina leccionada em termos de instalação específica (por exemplo, a disciplina de Educação Física requer a ocupação de um ginásio, a disciplina de Física/Química necessita de decorrer num laboratório, etc).
- deve ser respeitado um número máximo de aulas diário para cada disciplina pois não é aconselhável concentrar muitas aulas da mesma disciplina no mesmo dia sob pena de se provocar uma diminuição do rendimento pedagógico.
- deve ser contemplado no horário um período destinado ao almoço, tanto para alunos como para professores

#### - (3º Grupo) - Restrições de melhoramento

Este grupo engloba as restrições que assumem um carácter essencialmente orientador, sendo a sua verificação apenas desejável na solução final. Poderiam ser apresentadas inúmeras restrições com esta natureza, no entanto, limitamo-nos a englobar os seguintes casos:

- os horários elaborados para alunos e professores, deverão apresentar, se possível, uma dispersão mínima das aulas, evitando a ocorrência de furos (períodos não preenchidos existentes entre períodos ocupados)
- as preferências horárias evidenciadas previamente pelos professores deverão ser respeitadas.

Em relação à última condição, é habitual a existência de pedidos por parte dos docentes para que os horários sejam elaborados de acordo com as suas disponibilidades de tempo. Se houver liberdade e flexibilidade no problema essas preferências podem ser satisfeitas melhorando a qualidade dos horários.

As restrições apresentadas, ditas de melhoramento, serão posteriormente incluídas na função objectivo do modelo formulado na secção (1.3). As restantes farão parte das restrições do referido modelo assumindo o mesmo nível de importância. No modelo neuronal desenvolvido no capítulo 3, é feita uma distinção das restrições por níveis de importância.

Importa ainda referir que esta caracterização não esgota todas as particularidades do problema de horários existente numa situação real. Outras considerações poderiam ser apontadas para a caracterização deste problema levando em consideração a enorme

diversidade de situações existente em cada instituição escolar. Pretendeu-se apenas reunir os aspectos considerados mais relevantes e comuns habitualmente presentes na criação de horários em escolas secundárias nacionais.

### 1.3. *Formalização em P.N.L. Binária*

Em conformidade com a caracterização previamente efectuada e atendendo a sua variabilidade, é natural que ao nível das formalizações seja possível apresentar alternativas adaptadas pontualmente a cada situação particular.

Do conjunto de formalizações possíveis optou-se por uma que tivesse uma boa aderência a realidade que nos propusemos estudar: os turnos e ciclos de uma escola secundária com um total de 2000 alunos.

Esta escolha foi feita tendo em consideração o *trade-off* que deve existir entre a facilidade de resolução computacional do problema e a sua utilidade como modelo matemático adaptado a uma situação real. De certo, existiriam formalizações com maior facilidade de implementação e resolução computacional. Como por exemplo, as formalizações baseadas na teoria dos grafos com formalização e resolução directa, mas que na prática revelam-se incompletas pois não contemplam todas as restrições relevantes de um caso real.

Refira-se adicionalmente que neste tipo de problemas é geralmente muito difícil a introdução de novas restrições sobre uma solução já determinada anteriormente.

Procede-se de seguida à apresentação da formalização proposta, em termos de um modelo de programação matemática com variáveis binárias.

#### Parâmetros:

$M_d$  número máximo de aulas diárias definido para a disciplina  $d$

$N_d$  número de horas semanais para a disciplina  $d$  previsto no plano curricular e na carga horária do professor que lhe corresponde

$s = (1, \dots, S)$  onde  $S$  é o número de salas disponíveis

$p = (1, \dots, P)$  onde  $P$  é o número de professores

- $d = (1 \dots D)$  onde  $D$  é o número de disciplinas
- $c = (1 \dots C)$  onde  $C$  é o número de turmas
- $discP(p)$  é o conjunto de disciplinas leccionadas pelo professor  $p$
- $discC(c)$  é o conjunto de disciplinas assistidas pela turma  $c$
- $t = (1 \dots T)$  onde  $T$  é o número total de tempos semanais
- $[B_{tt}]$  é uma matriz quadrada de ordem  $T$  que pretende exprimir a penalização subjectiva decorrente da ocupação de dois periodos horários ( $t$  e  $t'$ )
- $[C_{sd}]$  é uma matriz tal que  $C_{sd} = \begin{cases} 0 & \text{se a sala } s \text{ é adequada a disciplina } d \\ 1 & \text{caso contrario} \end{cases}$
- $[I_{dd'}]$  é uma matriz tal que  $I_{dd'} = \begin{cases} 1 & \text{caso as disciplina } d \text{ e } d' \text{ sejam incompatíveis} \\ 0 & \text{caso contrario} \end{cases}$
- $[G_{pt}]$  é uma matriz que regista a disponibilidade relativa do professor  $p$  no periodo  $t$
- $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\delta$  são ponderadores associados as diferentes componentes da função objectivo.

Consideramos nesta formalização  $T=50$ , resultantes de 10 periodos diarios distribuidos tal como a Tabela (1-1) ilustra

Tabela 1-1 - Períodos horários

Horas	Seg	Ter	Qua	Qui	Sex
8:00 - 9:00	1	11	21	31	41
9:00 - 10:00	2	12	22	32	42
10:00 - 11:00	3	13	23	33	43
11:00 - 12:00	4	14	24	34	44
12:00 - 13:00	5	15	25	35	45
13:00 - 14:00	6	16	26	36	46
14:00 - 15:00	7	17	27	37	47
15:00 - 16:00	8	18	28	38	48
16:00 - 17:00	9	19	29	39	49
17:00 - 18:00	10	20	30	40	50

Variáveis

$x_{sdt} = \begin{cases} 1 & \text{caso a sala } s \text{ fique ocupada pela disciplina } d \text{ no periodo } t \\ 0 & \text{caso contrario} \end{cases}$

Função objectivo

1.1)                    minimizar  $z = \alpha \cdot f_1 + \beta \cdot f_2 + \delta \cdot f_3$

sendo,

$$1.2) \quad f_1 = \sum_{p=1}^P \sum_{t=1}^T \sum_{l=1}^L B_{ptl} \left( \sum_{s=1}^S \sum_{d=1}^D x_{sdt} \right) \left( \sum_{s=1}^S \sum_{d=1}^D x_{sdt} \right)$$

$$1.3) \quad f_2 = \sum_{p=1}^P \sum_{t=1}^T \sum_{l=1}^L B_{ptl} \left( \sum_{s=1}^S \sum_{d=1}^D x_{sdt} \right) \left( \sum_{s=1}^S \sum_{d=1}^D x_{sdt} \right)$$

$$1.4) \quad f_3 = \sum_{p=1}^P \sum_{t=1}^T G_{pt} \left( \sum_{s=1}^S \sum_{d=1}^D x_{sdt} \right)$$

A função objectivo proposta é composta por três componentes cujo peso depende do ponderador associado. É desta forma possível, através da manipulação destes ponderadores, atribuir menor ou maior importância a determinados aspectos da solução representados por cada uma das componentes  $(f_1)$ ,  $(f_2)$  e  $(f_3)$ .

A primeira componente  $(f_1)$  tem como finalidade melhorar a qualidade global dos horários propostos para os professores. Através da matriz  $B_{ptl}$  são penalizados os horários com maior dispersão de aulas e onde existam muitos furos. Quanto menor for a separação entre os dois periodos horários ocupados menor será a penalização correspondente e vice-versa. No problema exemplificativo apresentado na secção (3.4.3) o conteúdo desta matriz será desenvolvido em maior detalhe.

A segunda componente  $(f_2)$  destina-se ao mesmo fim que a anterior, só que neste caso a selecção de horários com maior qualidade é feita ao nível das turmas.

A última componente  $(f_3)$ , tem por objectivo, integrar no modelo as diferentes disponibilidades ao longo do periodo semanal, evidenciadas pelos professores. Por motivos de simplificação consideram-se três níveis de disponibilidade: 0 = disponível, 1 = disponibilidade relativa e 10 = indisponível.

Quanto a restrições consideraram-se as seguintes.

#### Restrições - 1º Grupo

$$1.5) \quad \sum_{d=1}^D x_{sdt} \leq 1 \quad \text{para } s = (1 \dots S) \text{ e } t = (1 \dots T)$$

Este grupo de restrições limita a ocupação das salas ao maximo de uma aula por periodo.

$$(1.6) \quad \sum_{s=1}^S \sum_{d \in \text{disc}(p)} x_{sdt} \leq 1 \quad \text{para } t = (1 \dots T), p = (1 \dots P)$$

Estas obrigam a que cada professor leccione no máximo uma aula por período

$$(1.7) \quad \sum_{d=1}^D \sum_{d' \neq d} \sum_{s=1}^S I_{dd'} x_{sdt} \cdot x_{sdt'} = 0 \quad \text{para } t = (1 \dots T)$$

As restrições (1.7) possuem dois fins: evitar a realização simultânea de duas ou mais aulas pertencentes ao mesmo professor, permitindo reforçar posteriormente no algoritmo neuronal o papel das restrições (1.6) e ainda excluir os possíveis conflitos resultantes da realização simultânea de disciplinas onde são envolvidos alunos comuns

### Restrições - 2º Grupo

$$(1.8) \quad \sum_{s=1}^S \sum_{t=1}^T x_{sdt} = N_d \quad \text{para } d = (1 \dots D)$$

Estas restrições obrigam ao cumprimento do número de horas semanais previsto no plano curricular.

$$(1.9) \quad \sum_{d=1}^D \sum_{s=1}^S C'_{sd} \cdot x_{sdt} = 0 \quad \text{para } t = (1 \dots T)$$

Estas restrições, garantem-nos que as salas são adequadas às disciplinas leccionadas de acordo com o plano definido antecipadamente na matriz  $[C'_{sd}]$

$$(1.10) \quad \sum_{s=1}^S \sum_{t=1+10h}^{S+10h} x_{sdt} \leq M_d \quad \text{para } d = (1 \dots D) \text{ e } h = (0,1,2,3,4)$$

Nestas restrições é definido o número máximo de aulas leccionadas por dia, em cada disciplina.

$$(1.11) \quad \sum_{d \in \text{disc}(P)} \sum_{s=1}^S \sum_{t=1+10h}^{S+10h} x_{sdt} \leq 1 \quad \text{para } p = (1 \dots P) \text{ e } h = (0,1,2,3,4)$$

$$(1.12) \quad \sum_{d \in \text{disc}(C')} \sum_{s=1}^S \sum_{t=1+10h}^{S+10h} x_{sdt} \leq 1 \quad \text{para } c = (1 \dots C') \text{ e } h = (0,1,2,3,4)$$



Estes grupos de restrições garantem a disponibilidade dos professores e das turmas para almoçar. Este tipo de restrições impõem a existência no mínimo de uma hora livre para almoço no período 12:00h - 14:00h, tanto para os professores como para os alunos.

$$(1.13) \quad x_{sdt} = 0,1 \quad \text{para} \quad s = (1 \dots S), d = (1 \dots D) \text{ e } t = (1 \dots T)$$

Por fim, este último grupo de restrições define o carácter binário das variáveis do problema.

Uma solução para o problema (E.H.E.), isto é, um conjunto de horários, fica caracterizada no contexto deste modelo de programação matemática não linear binária por um conjunto de atribuições às  $S \times D \times T$  variáveis binárias que sejam compatíveis com as restrições (1.5) a (1.13). A solução ótima da formalização em P.N.L. Binária corresponde a um conjunto de horários de elevada qualidade tanto para os professores como para os alunos envolvidos, pois satisfaz integralmente as restrições dos 1º e 2º Grupos e em relação ao 3º Grupo procura uma conciliação de interesses em função das ponderações escolhidas para os parâmetros  $\alpha$ ,  $\beta$ , e  $\delta$ .

Na prática o problema de (E.H.E.) quando formalizado em P.N.L. Binária adquire, mesmo em pequenas instituições escolares, dimensões muito elevadas, ultrapassando facilmente uma dezena de milhar de variáveis e restrições. Neste contexto torna-se pois muito difícil a sua resolução optimal (dado os recursos computacionais exigidos), pelo que normalmente são desenvolvidas heurísticas específicas que preterem a pesquisa de uma solução optimal pela obtenção de uma solução de qualidade aceitável, obtida num tempo computacional aceitável.

Outro factor importante para a justificação da adopção de heurísticas e a inclusão no âmbito da sua formalização, de função objectivo e restrições de carácter subjectivo que remetem para segundo plano a obtenção de soluções "totalmente admissíveis" e optimas, já que essas soluções são determinadas pressupondo determinados parâmetros subjectivos.

Por último dada a elevada complexidade geralmente associada à resolução dos problemas de (E.H.E.) quando formalizados em P.N.L. Binária torna aconselhável o recurso a métodos heurísticos para a sua resolução prática.

## 2. *Revisão Bibliográfica*

### 2.1. *Introdução*

Neste capítulo faz-se a apresentação e descrição sumária de alguns dos trabalhos mais relevantes, propostos por diversos autores e que directamente se relacionam com o problema em estudo - o problema (E.H.E.)

Porém, antes de proceder a essa apresentação é oportuno tecer algumas considerações acerca das limitações e características comuns encontradas no conjunto de trabalhos analisados.

Embora este tipo de problemas tenha na prática, uma existência muito anterior, só a partir da década de 50 terá sido objecto de estudo da Investigação Operacional.

Desde essa data, é possível verificar o aparecimento de trabalhos isolados que resultam de aplicações de Programação Matemática a problemas particulares, situações geradas por uma necessidade pontual originada na instituição ligada aos investigadores (por exemplo, a necessidade de criação de horários/disciplinas ou criação de um calendário de exames num determinado ano lectivo).

Apesar do enorme volume de trabalhos produzidos, reconhece-se de uma forma geral a impossibilidade de identificar um modelo, capaz de ser apresentado como globalmente eficaz na resolução de qualquer problema de criação de horários. Paralelamente falham também as tentativas para elaborar uma avaliação comparativa de eficiência aos diversos métodos adoptados na resolução destes problemas.

É este panorama de elevada variabilidade, agravado pelas dificuldades naturais presentes neste tipo de problemas (complexidade e dimensão) que motiva o interesse pelo estudo nesta área aplicacional.

A este respeito retira-se que alguns destes problemas de optimização foram classificados de NP-difíceis (Even e Shamir, 1976), enquanto outros admitem como casos particulares problemas de coloração e de partição de um grafo, classificados de NP-difíceis (Garey e Johnson, 1979).

Por último, convém referir que a maioria dos trabalhos existentes nesta área se encontram adaptados ao sistema educacional americano/canadiano, que em alguns aspectos é substancialmente diferente do utilizado no nosso país. Contudo, na sua essência as preocupações e restrições globais presentes são basicamente idênticas.

Dada a já referida variabilidade de trabalhos existentes optou-se por efectuar uma selecção dos mais relevantes os quais são posteriormente descritos sumariamente nas secções (2.2) e (2.3).

Globalmente no conjunto de trabalhos encontrados foi possível detectar dois tipos de problemas considerados afins ao problema de (E.H.E.):

- o problema de Elaboração de Horários/Disciplinas Escolares (E.H/D.E.);
- o problema de Elaboração de um Calendário de Exames (E.C.E.).

Ambos são problemas nos quais se procede à afectação de recursos (professores, alunos, salas) a um determinado conjunto fixo de períodos horários, sujeita a um conjunto mais ou menos rígido de restrições.

A distinção essencial entre este tipo de problemas reside no facto de normalmente no problema de (E.C.E.) só existir um exame para cada disciplina durante o período de exames, enquanto que no problema de (E.H/D.E.) a mesma disciplina é normalmente repetida diversas vezes durante o período semanal. Além desse facto, enquanto que no problema (E.H/D.E.) a ênfase é colocada na eliminação/minimização dos conflitos existentes entre as possíveis aulas assistidas pelos alunos e na concentração das aulas, nos problemas da criação de um calendário de exames o objectivo principal é a elaboração de um calendário que ofereça a cada aluno uma maior dispersão nas datas dos exames, proporcionando uma melhor preparação para o exame.

Refira-se que cabem em cada grupo problemas bem diversos, quer em objectivos, quer em restrições, ao contrário do problema de (E.H.E.) que se aplica a uma classe muito restrita de problemas.

## 2.2. *Trabalhos relacionados com o problema de (E.H/D.E)*

É neste tipo de problemas que se torna mais evidente a distinção entre o sistema educacional americano/canadiano e o português. A diferença principal reside na forma como são criadas as turmas e na preocupação principal presente na criação dos horários. Enquanto que no sistema português as turmas são definidas durante o processo de matrículas (funcionando numa base essencialmente fixa), no sistema americano/canadiano, estas são constituídas durante a elaboração dos horários tendo em conta o elevado número de disciplinas opcionais disponíveis para os alunos (não existindo a nossa habitual noção de turma, mas sim um conjunto de disciplinas para cada estudante)

No sistema americano a preocupação principal é a minimização dos conflitos originados pelas escolhas disciplinares dos alunos, enquanto que no sistema português, dado o menor número de disciplinas opcionais, não é permitida a existência de quaisquer conflitos, sendo a preocupação principal dirigida para o processo de atribuição dos professores/turmas às salas e tempos disponíveis, procurando uma utilização racional desses recursos.

Assim nesta área começamos por descrever o primeiro trabalho de que temos conhecimento (Carlson e Nemhauser, 1965). Seguem-se um P.L. Binário (Tripathy, 1984) e dois modelos baseados em grafos (Mulvey, 1982) e (Kiaer e Tellen, 1991). Apresentam-se depois, uma abordagem com dois sub-problemas (Aubin e Ferland, 1988), outra semelhante que incorpora uma técnica de *tabu search* (Hertz, 1991) e ainda uma versão simplificada proposta por (Laporte e Desroches, 1986). É posteriormente descrito um modelo adaptado ao sistema educacional europeu (Abramsom, 1991). Por fim, apresentam-se dois modelos de (E.H/D.E) no âmbito das redes neurais (Yu, 1990) e (Gislén, Peterson e Soderberg, 1992), este último adaptado ao sistema escolar europeu.

Carlson e Nemhauser (1965) apresentam a primeira abordagem de que temos conhecimento para este tipo de problema, utilizando uma formalização bastante simplificada. Neste trabalho o problema de (E.H/D.E.) foi definido como um problema em que existem várias actividades (disciplinas) que competem simultaneamente para um

número limitado de recursos homogêneos (períodos horários). Esta competição está porém sujeita a duas restrições:

- cada disciplina só pode ocupar exactamente um período horário;
- existe um custo associado a cada combinação simultânea de duas disciplinas

A magnitude deste custo é, neste caso, definida como o número de estudantes que desejam assistir a ambas as disciplinas em causa. Em termos de formulação matemática o problema apresenta-se como um problema de programação quadrática binária com restrições lineares simples.

#### Parâmetros:

$m$  = número de disciplinas

$n$  = número de períodos horários

$[a_{ik}]$  é uma matriz quadrada cujos componentes são representativos do custo (número de alunos) associado à realização simultânea das disciplinas  $i$  e  $k$ .

#### Variáveis:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{caso a disciplina } i \text{ seja leccionada no período } j \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Pretende-se encontrar uma matriz  $X_{(m \times n)} = [x_{ij}]$  que seja solução do problema

$$2.1) \quad \text{minimizar } z = \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ik} \cdot x_{ij} \cdot x_{kj}$$

s. a

$$2.2) \quad \sum_{j=1}^n x_{ij} = 1 \quad \text{para } i = (1, \dots, m)$$

$$2.3) \quad x_{ij} = 0 \text{ ou } 1 \quad \text{para } i = (1, \dots, m), j = (1, \dots, n)$$

Para resolver o problema os autores apresentam um algoritmo que partindo de uma solução inicial, utiliza uma heurística melhorativa baseada em trocas arbitrárias nas linhas de  $X_{min}$ , com vista a obter mínimos locais de maior qualidade

Uma abordagem mais realística é a feita por Tripathy (1984), que opta por uma formalização do problema de (E.H/D.E.) em termos de um problema de programação linear binária. Neste modelo já são tomadas em consideração as restrições referentes a disponibilidade das salas de aula. São apresentados ainda, os resultados computacionais resultantes de uma aplicação a um problema de grande dimensão: uma instituição escolar com cerca de 900 disciplinas disponíveis anualmente

Por forma a reduzir a elevada dimensão do problema resultante, a autora propõe uma fase prévia de agrupamento. Nesta fase, são reunidos os alunos que efectuaram a mesma escolha de disciplinas, formando-se deste modo grupos homogêneos de escolhas

De forma idêntica, faz-se um agrupamento das disciplinas de acordo com os padrões de escolha efectuados. De seguida, é elaborada uma matriz de conflitos que reúne a informação acerca dos grupos de disciplinas que, por envolverem alunos comuns, não podem decorrer simultaneamente. Efectuado este tratamento inicial de dados, e definido um agrupamento semelhante das salas tendo em conta a sua adequação as diferentes disciplinas, o modelo pode ser formulado nos termos que se seguem

#### Parâmetros

$NSG$  = número total de grupos de disciplinas

$NTG$  = número total de grupos de estudantes

$NRG$  = número total de grupos de salas

$NP$  = número total de períodos numa semana

$NSPG_i$  = número total de períodos semanais atribuídos ao grupo de disciplinas  $i$

$a_k$  = número de salas disponíveis do grupo  $k$ , no período  $j$

$R_k$  = subconjunto dos grupos de disciplinas que requerem salas do grupo  $k$

$I_i$  = subconjunto dos grupos de disciplinas assistidas pelo grupo de estudantes  $i$

$[c_{ij}]$  é uma matriz cujos elementos expressam a relativa conveniência da combinação da disciplina  $i$  com o período  $j$ . Um valor elevado determina uma combinação desejável, enquanto que um valor baixo determina uma combinação desfavorável. Quando todos os elementos são nulos o problema limita-se a encontrar uma solução admissível.

#### Variáveis

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se o grupo de disciplinas } i \text{ é afecto ao período } j \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

No caso em análise pretende-se encontrar uma matriz  $X = [x_{ij}]$  de forma a

$$2.4) \quad \text{maximizar } z = \sum_{i=1}^{NSG} \sum_{j=1}^{NP} c_{ij} x_{ij}$$

s. a

$$2.5) \quad \sum_{j=1}^{NP} x_{ij} = NSPG_i \quad \text{para } i = (1 \dots NSG)$$

$$2.6) \quad \sum_{i \in R_k} x_{ij} \leq a_{kj} \quad \text{para } j = (1 \dots NP), k = (1 \dots NRG)$$

$$2.7) \quad \sum_{i \in I_l} x_{ij} \leq 1 \quad \text{para } j = (1 \dots NP), l = (1 \dots NTG)$$

$$2.8) \quad x_{ij} = 0 \text{ ou } 1 \quad \text{para } i = (1 \dots NSG), j = (1 \dots NP)$$

Para a resolução deste problema de programação linear binária de grande dimensão (difícilmente resolúvel por métodos convencionais), a autora propõe uma resolução por intermédio de técnicas baseadas na relaxação lagrangeana. São discutidas as diferentes propostas de relaxamento efectuadas, respectivamente, sobre as restrições de integralidade, sobre as restrições do tipo (2.6) e por último sobre as restrições do tipo (2.7). É analisada a estrutura particular de cada problema relaxado e adaptado um método para a sua rápida resolução, nomeadamente heurísticas particulares, optimização pelo método do sub-gradiente e um algoritmo *out-of-kilter*. As abordagens de resolução propostas incluem ainda sub-procedimentos de *branch-and-bound*.

Uma interpretação diferente é-nos apresentada por Mulvey (1982). Partindo de um problema típico de (E H/D E ) o autor propõe uma metodologia de resolução apoiada numa modelização em termos de redes. O autor considera fundamental a existência de uma fase inicial de estudo, na qual se procede a adaptação e respectiva representação do problema no contexto da teoria das redes. Deste modo, segundo o autor, é possível incorporar os avanços verificados na resolução dos problemas de redes, no estudo dos problemas (E H/D E )

Partindo de um modelo matemático proposto inicialmente por Knauer (1975), o autor reconhece a sua semelhança com um problema de redes

Considerando um agrupamento inicial dos recursos em combinações de pares (professor/turma) e (sala/periodo), a modelização é a seguinte

#### Parâmetros:

$m$  = número total de pares (professor/turma)

$n$  = número total de pares (sala/periodo)

$P$  = número total de professores

$R$  = número total de turmas

$T$  = número total de periodos

$I_p$  = subconjunto de disciplinas que envolvem o professor  $p$

$I_r$  = subconjunto de disciplinas que envolvem a turma  $r$

$S_t$  = conjunto de pares (sala/periodo) que ocorrem no mesmo periodo

$C_{ij}$  = número de lugares ocupados quando a disciplina  $i$  é afectada ao par  $j$  (sala periodo)

$K_r$  = número de estudantes na turma  $r$

$f_j$  = capacidade da sala  $j$

#### Variáveis

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se o par } i \text{ (professor + sala) é afectado ao par } j \text{ (sala + periodo)} \\ 0 & \text{caso contrario} \end{cases}$$



O objectivo é determinar  $X = [x_{ij}]$  tal que

$$(2.9) \quad \text{maximizar } z = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij}$$

s.a

$$(2.10) \quad \sum_{j=1}^n x_{ij} = 1 \quad \text{para } i = (1 \dots m)$$

$$(2.11) \quad \sum_{i=1}^m k_{ij} x_{ij} \leq f_j \quad \text{para } j = (1 \dots n)$$

$$(2.12) \quad \sum_{i=1}^m \sum_{j \in S_t} x_{ij} \leq 1 \quad \text{para } p = (1 \dots P), t = (1 \dots T)$$

$$(2.13) \quad \sum_{i \in I_r} \sum_{j \in S_t} x_{ij} \leq 1 \quad \text{para } r = (1 \dots R), t = (1 \dots T)$$

$$(2.14) \quad x_{ij} = 0 \text{ ou } 1 \quad \text{para } i = (1 \dots m), j = (1 \dots n)$$

Este autor mostra que tal formalização pode ser representada como um problema de optimização em redes, em que cada par (professor/turma) e (sala, período) e representado por um nodo, e em que um arco entre nodos representa uma atribuição entre esses recursos. São utilizados adicionalmente dois nodos extra, que se destinam a implementar as restrições (2.13) e (2.14) através da limitação do fluxo incidente nesses nodos. Como se pode verificar, este modelo utiliza como medida de optimização o número de lugares ocupados, contribuindo globalmente para uma ocupação mais racional das salas.

Outro pormenor relevante referido neste trabalho, é a opção por uma metodologia aplicada num contexto interactivo homem-maquina, em que todo o processo heurístico para a determinação da solução é constantemente supervisionado pelo utilizador. Deste modo, é possível ao decisor satisfazer determinadas restrições e preferências não contempladas formalmente pelo modelo.

Uma resolução no âmbito das redes mas formalmente diferente é apresentada por Kiaer e Tellen(1991) que optam pela resolução do problema de (E H D E) como um problema de coloração dos vertices de um grafo com pesos nas arestas. Considerando os vórtices como sendo as disciplinas a leccionar, e as arestas existentes entre vertices

representando disciplinas que por alguma limitação não podem decorrer simultaneamente. o objectivo é colorir com o número mínimo de cores todos os vértices, satisfazendo a condição de coloração, que obriga vértices adjacentes a possuir cores distintas. Neste contexto cada cor corresponde a um período de tempo distinto. O objectivo final é encontrar um esquema de coloração que respeite a condição de coloração, e em que o número mínimo de cores utilizado (número cromático do grafo) não ultrapasse o número de períodos horários disponíveis. Se tal não acontecer, o autor reconhece a impossibilidade de encontrar uma solução sem conflitos, passando o problema clássico da coloração dos vértices de um grafo a ser insuficiente para fornecer uma solução. Neste sentido, é proposto um grafo modificado em que as arestas incluem pesos indicadores da maior ou menor conflituosidade entre os vértices (disciplinas). Paralelamente, para implementar o aspecto da disponibilidade das salas é introduzido um vector representativo do número de salas disponíveis.

É então proposta uma heurística de coloração dos vértices, em que os vértices são coloridos segundo a regra de colorir o vértice mais difícil em primeiro lugar.

O critério para a determinação da dificuldade de coloração de um vértice, é expresso em termos de uma função de selecção que toma em consideração os custos associados a cada vértice, a soma dos pesos dos arcos adjacentes a cada vértice e ainda a noção de cor proibida (cor já utilizada num vértice adjacente).

Este processo heurístico fornece como solução uma coloração dos vértices de um grafo com  $k$  cores, determinando qual o custo associado.

No referido trabalho é analisada, para diferentes dimensões, a influência de cada uma das componentes da função selecção na obtenção das soluções. É ainda efectuada uma comparação do desempenho satisfatório desta heurística, e dos seus criterios de selecção face à solução óptima obtida por resolução de um problema de programação linear inteira. Por último é descrita uma aplicação prática do método na elaboração de horários para uma escola de engenharia com um total de 64 disciplinas distribuídas por um horário de 6 períodos semanais.

Uma abordagem bastante diferente, considerada de certa forma inovadora na resolução deste problema, é-nos apresentada por Aubin e Ferland (1988). Já num anterior trabalho de Ferland e Roy (1983) se pode notar uma ruptura com a abordagem tradicional de resolução do problema de (E H/D E.)

A principal inovação presente nestes trabalhos reside na decomposição do problema global em dois sub-problemas distintos mas inter-relacionados: o sub-problema de horários e o sub-problema de agrupamento de alunos. Nesta abordagem, os alunos são numa primeira fase agrupados pelas disciplinas de acordo com os horários inicialmente existentes, visando a minimização dos conflitos entre as diversas disciplinas (sub-problema de agrupamento). Posteriormente procede-se à optimização dos horários considerando os grupos constituídos anteriormente, tentando utilizar racionalmente as salas e professores (sub-problema de horários). Nestes termos, a solução final resulta de um processo iterativo onde estes dois sub-problemas são ajustados mutuamente até que globalmente não seja possível melhorar a solução.

No que respeita à formalização em termos de programação matemática, o modelo surge-nos como um problema de programação linear binária, em que é possível identificar dois sub-problemas de afectação de entidades a recursos, que interagem através da função objectivo: o sub-problema de horários e o de agrupamento.

O modelo é especificado em seguida.

#### Parâmetros:

$m$  = número total de períodos

$n$  = número total de disciplinas

$S$  = número total de alunos

$R_s$  = conjunto de disciplinas escolhidas pelo aluno  $s$

$A$  = número total de grupos

$Q_w$  = conjunto de grupos que assistem à disciplina  $w$

$\mu$  = ponderador associado à existência de conflitos de agrupamento

## Variáveis

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se a disciplina } i \text{ tem início no período } j \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases} \quad \text{variáveis do sub-problema de horários}$$

$$y_{sa} = \begin{cases} 1 & \text{se o aluno } s \text{ é afecto ao grupo } a \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases} \quad \text{variáveis do sub-problema de agrupamento}$$

## Pretende-se

$$2.14) \quad \text{minimizar } z = f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = f_1(\mathbf{x}) + \mu f_2(\mathbf{x}, \mathbf{y})$$

s.a

$$2.15) \quad \sum_{j=1}^m x_{ij} = 1 \quad \text{para } i = (1, \dots, n) \quad \text{restrições do sub-problema de horários}$$

$$2.16) \quad x_{ij} = 0 \text{ ou } 1 \quad \text{para } j = (1, \dots, m), i = (1, \dots, n)$$

$$2.17) \quad \sum_{s \in Q_a} y_{sa} = 1 \quad \text{para } s = (1, \dots, S), w \in R_s \quad \text{restrições do sub-problema de agrupamento}$$

$$2.18) \quad y_{sa} = 0 \text{ ou } 1 \quad \text{para } s = (1, \dots, S), a = (1, \dots, A)$$

A função objectivo proposta pelos autores é, como vimos, formada por duas componentes  $f_1(\mathbf{x})$  e  $f_2(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  que globalmente actuam como medida de qualidade da solução. A parcela  $f_1(\mathbf{x})$ , dependente exclusivamente das variáveis do sub-problema de horários ( $x_{ij}$ ), é ainda decomposta em três parcelas distintas:

$$2.19) \quad f_1(\mathbf{x}) = f_{11}(\mathbf{x}) + f_{12}(\mathbf{x}) + f_{13}(\mathbf{x})$$

em que:

$f_{11}(\mathbf{x})$  representa o custo linear de afectação, especificado em termos de disponibilidades e preferências dos professores;

$f_{12}(\mathbf{x})$  expressa o custo linear associado ao facto do número de salas necessárias exceder o número de salas existentes (levando em conta os seus diferentes tipos),



$f_1(\mathbf{x})$  avalia o custo do conflito decorrente da necessidade de utilização simultânea de uma sala ou de um professor

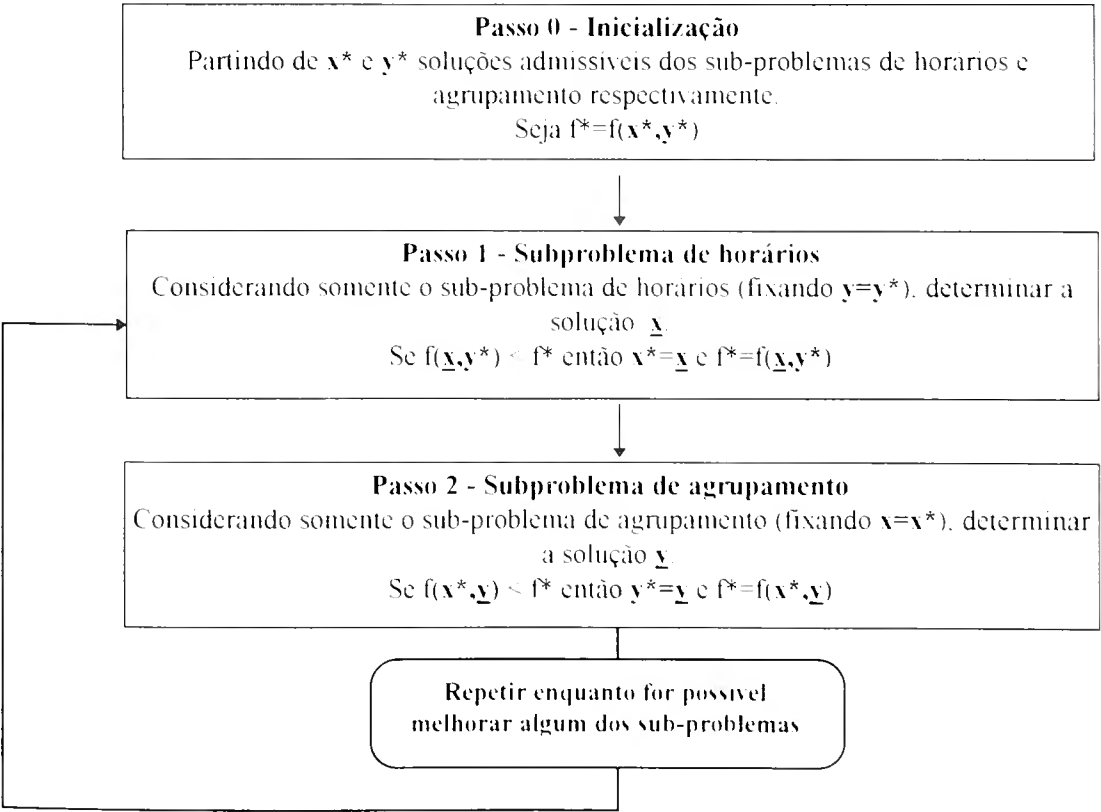
Por seu turno,  $f_2(\mathbf{x},\mathbf{y})$ , expressa em função das variáveis de ambos os sub-problemas, mede o número de horas em conflito quando se utilizam os horários e os agrupamentos dados

Quando se efectua a resolução de um dos sub-problemas, a função objectivo é actualizada utilizando a solução corrente do outro sub-problema, e vice-versa. Atraves destes sucessivos ajustamentos nas soluções dos dois sub-problemas (conectados por via da função objectivo) é assegurada a convergência global para soluções de melhor qualidade

As técnicas de resolução utilizadas para cada um dos sub-problemas de afectação baseam-se em procedimentos de re-afecção (individual e em pares) e ainda num *branch-and-bound* para o sub-problema de agrupamento

É assim definido um processo iterativo que pode ser sintetizado da seguinte forma

Figura 2-1 - Descrição do algoritmo



Neste trabalho, são ainda apresentados resultados de uma aplicação bem sucedida deste método numa escola secundária de Montreal-Canadá, no qual se testam diferentes valores para o parâmetros penalizador da função objectivo (Eq. 2.14)

Como prova do relativo sucesso desta nova abordagem podemos referenciar outro trabalho de Ferland e Fleurent (1994), onde se apresenta um Sistema de Apoio a Decisão para elaboração de horários/turmas, disponível para microcomputadores. Este sistema (SAPHIR) baseia-se teoricamente no modelo apresentado, funcionando num ambiente interactivo, combinando processos de optimização automática com processos semi-automáticos, os quais permitem introduzir indicações particulares do operador do sistema.

Os autores referem que o sistema é bastante flexível, sendo utilizado com sucesso em duas universidades canadianas de grande dimensão (Montreal e Sherbrooke)

Um método de resolução diferente do usado no modelo anterior é-nos apresentado por Hertz (1991). Adoptando a mesma formalização desenvolvida por Aubin e Ferland, esta abordagem incorpora, no entanto, uma técnica de *tabu search*. Através desta técnica é possível, segundo o autor, a obtenção de soluções de melhor qualidade relativamente ao modelo original de Aubin e Ferland, devido à capacidade reconhecida ao *tabu search* para evitar paragens em mínimos locais. Deste modo são analisados os dois sub-problemas numa óptica do *tabu search*. Para o sub-problema de elaboração o de horários, é criada inicialmente uma solução "admissível", tendo em conta a verificação de um determinado conjunto de restrições e preferências fixas (disponibilidade dos professores e capacidade das salas).

O conceito de "admissibilidade" da solução para o sub-problema de horários sofre neste contexto um alargamento, sendo relaxadas algumas restrições consideradas importantes noutros trabalhos. Por exemplo, é considerada "admissível" uma solução que inclua conflitos do tipo: num determinado tempo, várias disciplinas partilham o mesmo professor ou os mesmos alunos.

Este relaxamento tem uma finalidade, dado o reduzido número de soluções admissíveis existente nos problemas reais de elaboração de horários, através deste processo é possível alargar o espaço de soluções pesquisado permitindo ao *tabu search*

uma análise mais exaustiva das soluções e melhorando, eventualmente, a qualidade da solução final.

Partindo da solução inicial do sub-problema de horários ( $\underline{x}$ ) é gerada uma vizinhança de soluções  $N(\underline{x})$  através da alteração do período inicial das aulas para cada turma. Em seguida a melhor solução para o sub-problema dentro da vizinhança é determinada utilizando uma função que pondera determinados aspectos da solução (número de professores e alunos em conflito com o horário corrente e o custo das aulas leccionadas em instalações distantes)

Quanto ao sub-problema de agrupamento parte inicialmente da solução corrente do sub-problema de horários, criando um agrupamento inicial ( $\underline{g}$ ). De seguida procede-se à análise de soluções numa vizinhança de ( $\underline{g}$ ), criadas através da afectação de alunos/turmas aos períodos horários ainda disponíveis e da troca de alunos entre turmas. Neste sub-problema a escolha de uma boa solução é resultante de uma função que determina o total de conflitos existentes com no presente horário com a distribuição dos alunos pelas respectivas turmas.

Este trabalho apresenta uma descrição da aplicação desta metodologia a um caso prático de criação de horários na Faculdade de Economia da Universidade de Génova

Uma abordagem alternativa é apresentada por Laporte e Desroches (1986). Adoptando uma perspectiva menos abrangente do problema de (E.H/D.E.) que parte de uma definição prévia do horário de realização de cada disciplina, estes autores consideram unicamente o problema de afectação dos alunos às disciplinas escolhidas, avaliando as afectações de acordo com os horários resultantes para cada aluno.

Para resolver este problema, que tem por objectivo a afectação de alunos às disciplinas escolhidas minimizando um conjunto de situações consideradas penalizadoras para o aluno e para a instituição, é necessário partir de uma situação específica: no início de cada ano lectivo é necessário disponibilizar aos alunos, um conjunto fixo de horários (elaborado com base em previsões e de acordo com os recursos disponíveis) contendo a informação relativa a cada disciplina (matéria leccionada, salas, horas e professor), para que os alunos possam efectuar as suas escolhas de acordo com esses dados.

A solução consistirá na distribuição dos alunos pelo grupo de disciplinas previamente definido, respeitando as matérias escolhidas, e de forma que os alunos fiquem com horários satisfatórios definidos pelos seguintes critérios:

ao nível da instituição

- deve existir equilíbrio entre a dimensão das diferentes disciplinas,
- a capacidade das salas não deve ser excedida.

ao nível do aluno

- deve ser evitado a todo o custo o conflito resultante da ocorrência simultânea de duas aulas para o mesmo aluno,
- os horários devem incluir um período para almoço,
- a dispersão das aulas ao longo do dia deve ser minimizada para evitar a formação de “furos”,
- a distância percorrida para assistir a aulas em diferentes instalações deve ser minimizada, devendo ser evitadas aulas consecutivas em instalações distantes.

Para quantificar a qualidade do horário de um aluno  $i$  o algoritmo utiliza a seguinte expressão:

$$2.20) \quad P_i = \sum_{l \text{ Dias da Semana}} P_{il}$$

onde  $P_{il}$  representa a penalidade total associada ao horário do aluno  $i$  no dia  $l$

Cada uma destas penalidades  $P_{il}$  é atribuída de acordo com uma quantificação subjectiva relativa à violação de cada um dos critérios descritos anteriormente.

Para satisfazer os objectivos dos estudantes deverá ser minimizada a soma de todos os  $P_i$ , pelo que essa é a orientação base de todo o processo algorítmico proposto.

Sinteticamente a heurística proposta envolve três fases distintas.

Numa primeira fase são identificados e agrupados os alunos com padrões idênticos de escolha, formando  $k$ -grupos de alunos com o mesmo conjunto de preferências. Nesta primeira fase não se atende à dimensão de cada um destes  $k$ -grupos, constituindo uma primeira aproximação à distribuição final.



Em seguida é feita uma afectação das disciplinas de cada um dos  $k$ -grupos com base no horário previamente definido de forma a satisfazer as opções escolhidas por cada grupo, minimizando o total de conflitos (soma de  $P_i$  para todos os alunos  $i$ ). Para este efeito é utilizado um *branch-and-bound* que enumera as diferentes possibilidades de selecção e determina quais as menos conflituosas.

Depois da atribuição global dos alunos é necessário, numa segunda fase, proceder ao equilíbrio em termos de dimensão, pelo facto da distribuição efectuada na primeira fase não considerar o número de alunos atribuídos a cada disciplina.

Este processo de equilíbrio na dimensão das disciplinas é efectuado iterativamente utilizando novamente um *branch-and-bound* no qual se tenta minimizar a deterioração provocada na afectação já definida, dispersando-a uniformemente entre todos os estudantes.

Embora as disciplinas possuam dimensões equilibradas, algumas destas podem exceder a capacidade da salas a que estão afectas, sendo necessário numa terceira fase efectuar uma redistribuição utilizando novamente um processo semelhante ao anterior.

Este trabalho termina com a apresentação de alguns resultados encorajadores da aplicação desta metodologia à Ecole Polytechnique de Montréal, e com algumas sugestões para melhoramentos nesta abordagem.

Uma resolução aplicável, em termos de formalização, ao sistema educacional europeu é-nos apresentada por Abramsom (1991). Utilizando uma heurística de *simulated annealing* pressupõe-se uma situação particular na qual é possível definir a priori a constituição das turmas, os professores envolvidos e as salas afectas, de acordo com as preferências dos professores e o número de salas existentes.

O problema de criação de horários, é visto sob esta perspectiva como um problema de afectação de um conjunto de trios (turma, professor, sala) a um determinado conjunto de periodos horários, respeitando um conjunto de restrições e orientações que determinam a qualidade do horário global final. Este conjunto de restrições engloba, tal como noutros trabalhos referenciados, uma lista hierarquica de orientações destinadas a:

- evitar os conflitos decorrentes da utilização simultânea de trios (turma, professor, sala) que envolvam os mesmos recursos
- evitar conflitos originados por turmas que têm alunos comuns (o que geralmente acontece com as turmas ligadas a disciplinas opcionais),
- adaptar as aulas as capacidades das salas disponíveis,
- possibilitar a existência de aulas com múltiplos períodos (existem normalmente algumas disciplinas de natureza prática que necessitam de mais do que um período consecutivo de aula),
- limitar o número máximo de aulas dadas durante um intervalo de tempo, quer para alunos quer para professores.

Para que estas orientações sejam incorporadas no algoritmo, é criada uma função objectivo que avalia cada horário proposto, atribuindo-lhe um custo total. Esta função é composta por diferentes parcelas representando a maior ou menor violação das diferentes preocupações listadas. Um horário que respeite todos os aspectos considerados terá um custo nulo.

É esta função que permitirá guiar o *simulated annealing*, na pesquisa de horários de melhor qualidade (menor custo).

O algoritmo é inicializado partindo de uma solução aleatória sendo calculado seu respectivo custo. Segue-se um processo iterativo de *annealing* no qual se escolhe aleatoriamente um período, horário e um trio (turma, sala, professor) sendo calculada a variação provocada na função objectivo resultante da atribuição desse trio a outro período, horário determinado também aleatoriamente. Esta modificação é aceite ou não de acordo com uma probabilidade controlada pelo processo de *annealing*.

O algoritmo é posteriormente testado para diferentes parâmetros de arrefecimento e para conjuntos de dados distintos. É elaborado um estudo empírico do efeito de cada um dos parâmetros envolvidos.

São por último discutidas e comparadas algumas vantagens resultantes da implementação do *simulated annealing* num computador com potencialidade para processamento em paralelo.

Uma abordagem totalmente diferente pode ser encontrada num trabalho de Yu (1990). Este autor estuda o problema de (E.H/D E ) num contexto de redes neuronais, podendo ser encontrados alguns aspectos comuns com o algoritmo a desenvolver pormenorizadamente no capítulo seguinte

Este autor considera a problemática da distribuição de um conjunto de disciplinas por um número de períodos horários, atendendo aos diversos tipos de conflitos/restrições que normalmente decorrem de uma aplicação prática

Utilizando uma rede neuronal de Hopfield com neurónios discretos e uma técnica que exige a decomposição binária dos períodos horários, o problema é formalizado como um problema de partição de um grafo. Cada nodo do grafo representa uma disciplina a afectar a um período horário, e cada arco representa uma incompatibilidade existente entre duas disciplinas afectas ao mesmo período horário.

Adaptada a formalização a uma rede neuronal de Hopfield onde cada nodo (disciplina/período horário) é representado por um neurónio (ou vários de acordo com a decomposição efectuada sobre número de períodos) são estabelecidas as ligações sinápticas entre os diferentes neurónios (o valor destas ligação dependerá do grau de conflituosidade entre os dois elementos).

É em seguida definida uma função de energia associada ao problema cujo valor depende do grau de cumprimento das restrições incluídas na função. Dado que o problema foi formalizado como um problema de partição de um grafo as parcelas que compõem a função energia procuram um equilíbrio entre todas as partições, bem como a minimização do conflito total encontrado nas partições estabelecidas.

A actualização dos neurónios é efectuada de uma forma aleatória e assíncrona até que a função de energia global atinja um mínimo, correspondendo à verificação das restrições impostas. Nesse momento o estado corrente dos neurónios constitui uma solução óptima local.

Por forma a minorar a imobilização do sistema em soluções óptimas locais de má qualidade é incorporado um mecanismo de *annealing* que aceita com probabilidade decrescente aumentos na função energia decorrentes da actualização dos neurónios.

No final deste trabalho é descrito um exemplo muito simplificado para o qual foi possível através desta metodologia encontrar a solução ótima global. São ainda apresentadas algumas considerações relevantes para a aplicação deste modelo a problemas de maior dimensão, nomeadamente modificações na decomposição binária dos períodos horários.

Por último, uma interessante e realista aplicação das redes neurais ao problema de (E.H/D.E.) foi apresentada por Gislen, Peterson e Soderberg (1989) e posteriormente aperfeiçoada pelos mesmos autores em (1992).

Este artigo apresenta um modelo que alarga o modelo neuronal de Hopfield as redes formadas por neurónios multiestado (neurónios de Potts) e a *mean field theory*.

Para a formalização do problema numa rede neuronal, consideraram-se os quatro conjuntos envolvidos no problema (professores, turmas, salas e períodos horários) reunidos em dois grupos formados por pares (professores/turmas) e (salas/períodos horários). Assim, o problema de horários consiste na afectação de elementos (pares) entre os dois grupos, o que facilita a sua formalização através de neurónios de Potts. A cada potencial ligação entre elementos destes dois grupos é atribuído um neurónio que na solução final tomará o valor 1 caso a ligação se verifique, e 0 caso contrário.

Quanto às restrições, os autores classificam-nas em duas classes distintas tal como no modelo apresentado nesta dissertação:

- restrições de admissibilidade, com carácter obrigatório, que evitam conflitos entre elementos que utilizam os mesmos recursos;
- restrições desejáveis, com carácter facultativo, que têm como objectivo melhorar alguns aspectos particulares da solução.

Na sua globalidade o modelo descrito por estes três autores é bastante abrangente em comparação com os anteriormente descritos ao longo desta secção. Orientado para uma aplicação ao sistema educativo Sueco (particularmente semelhante ao europeu/português), esta modelização contempla grande parte dos condicionalismos presentes num caso real, tais como: disciplinas com periodicidade distinta, possibilidade de formação de turmas e sub-turmas não disjuntas e salvaguarda de um período horário para

almoço. Paralelamente é procurada a minimização dos “furos” diários, bem como, a distribuição homogênea das aulas durante o período temporal do horário.

Adicionalmente esta abordagem incorpora um mecanismo de *annealing* para auxiliar a convergência para soluções de melhor qualidade.

Por fim, é descrita uma aplicação bem sucedida deste modelo a um complexo caso real de horários numa escola secundária de média dimensão, a Tensta High School-Suécia.

Analisada sob a perspectiva apenas da formalização em redes neurais (construção dos neurónios e codificação da função objectivo e restrições), esta abordagem é semelhante a desenvolvida nesta dissertação (no capítulo 3)

### 2.3. *Trabalhos relacionados com o problema de criação de calendário de exames*

No domínio da Elaboração de Calendários de Exames (E.C.E.), são relevantes os trabalhos que se seguem. Em primeiro lugar é descrita uma abordagem baseada no problema de coloração de um grafo (Metha, 1981). Segue-se um modelo adaptado à programação de seminários numa conferência (Egglese e Rand, 1987). De uma forma semelhante, mas apresentando uma formalização em P.L. Binária, Johnson (1990) propõe um modelo para o problema de (E.C.E.). Por último descreve-se um modelo heurístico elaborado por Laporte e Desroches (1984).

Metha (1981) apresenta um trabalho no âmbito do problema de criação de um calendário de exames. Reconhecendo também a evidente ligação existente entre este tipo de problemas e o problema de coloração mínima de um grafo, é apresentada uma metodologia baseada numa formalização muito similar à definida por Kiaer e Tellen a propósito do problema de (E.H/D.E.).

Por cada exame a efectuar é criado um nodo, sendo introduzida um arco entre dois nodos como indicador de um eventual conflito existente entre os dois exames, quando realizados simultaneamente, quer pela existência de alunos comuns aos dois exames quer pela duplicação de quaisquer outros recursos tais como professores ou salas.

A resolução do problema é efectuada através de um algoritmo de coloração dos nodos de um grafo. Fazendo corresponder cada cor a um tempo horário distinto, e definindo a partida o número máximo de periodos disponiveis, o objectivo do algoritmo consiste na atribuição de cores (tempos) a todos os nodos (exames) não excedendo o número de periodos possivel. Nas situações em que tal não seja possivel, nomeadamente, quando o número de periodos horários é inferior ao número cromático do grafo, o algoritmo efectua uma “compressão” do calendário de exames admitindo a ocorrência dos conflitos globalmente menos penalizadores.

Definida a afectação dos exames aos periodos horários, a solução é sujeita a um processo de reorganização da sequência dos periodos horários, pretendendo minimizar a ocorrência de situações nas quais o mesmo aluno é afecto a vários exames consecutivos ou muito próximos.

O trabalho termina com uma aplicação do método a um caso real de elaboração do calendário de exames no Cedar Crest College - Pennsylvania - USA

Ainda nesta área, Eglese e Rand (1987) apresentam uma aplicação que embora não directamente relacionada com a calendarização de exames possui características que a incluem na classe de problemas de (E.C.E.)

Baseando-se num problema real de elaboração do programa de seminários durante uma conferência, os autores desenvolvem uma heurística que incorpora um mecanismo de *simulated annealing*.

De um total de 15 seminarios oferecidos durante a conferência, foi pedido aos participantes que escolhessem, indicando a ordem de preferência, quatro dos seminarios a que pretendiam assistir. Adicionalmente foi pedido a cada participante que apresentasse mais uma escolha que funcionaria como reserva caso não fosse possivel atender a todas as preferências manifestadas anteriormente

A solução deste problema consistia em satisfazer ao maximo as preferências dos participantes, respeitando os diversos condicionalismos existentes: duração total da conferência, número de salas disponiveis, capacidade e equipamento das salas e disponibilidade dos respectivos oradores.

Tal com no problema de criação do calendario de exames, e desejavel reunir todo o conjunto de seminários no menor número de dias possivel tentando, no entanto, oferecer uma distribuição equilibrada dos seminários para cada participante

Neste contexto, é proposta uma heurística que resumidamente se decompõe da seguinte forma. Numa primeira fase é elaborada uma solução admissivel inicial. Partindo das escolhas efectuadas pelos participantes, e sem considerar a sua ordem de preferência, é construída uma matriz que reúne a globalidade das escolhas efectuadas. Esta matriz permite avaliar os conflitos, expressos em número de participantes, resultantes da realização simultânea de quaisquer par de seminários. A partir desta avaliação é calculada a prioridade de cada seminário (por ordem crescente de conflituosidade) e atribuidos os periodos horários destinados à sua realização. Fica assim criado um horario global que define o momento de realização de cada um dos seminários oferecidos.

Numa segunda fase, os participantes são atribuidos aos respectivos seminários de acordo com as escolhas previamente efectuadas. Para o efeito é criada uma função de penalização, calculada para cada participante, que atribui um "custo" a não concretização das preferências manifestadas anteriormente. A penalização será tanto maior quanto maior for a diferença entre a ordem de escolha efectuada e a ordem disponivel)

Neste processo de distribuição é efectuada uma equalização da dimensão de cada seminário (número de participantes). Deste modo, sempre que exista a possibilidade de colocar um participante em seminários alternativos, sem aumentar o valor de penalização, este será colocado no seminário menos preenchido.

Fica assim completa uma solução inicial para o programa de seminarios.

A terceira e última fase desta heurística, consiste na melhoria da solução inicial utilizando um mecanismo de *simulated annealing*. Gerando soluções apartir da solução inicial, através do cancelamento de um seminário e substituindo-o por outro do mesmo periodo, é garantida a sua admissibilidade, em termos do limite de salas e oradores.

É, em seguida, efectuada uma redistribuição dos participantes e calculada a penalização total associada à nova solução. De acordo com as regras do *annealing* a nova solução é aceite ou não até à finalização do algoritmo.

Neste trabalho são efectuadas algumas comparações da eficiência da heurística proposta face ao processo manual utilizado.

Uma abordagem semelhante a anterior, mas já na área da calendarização de exames escolares, é-nos apresentada por Johnson (1990). Baseando-se num caso real, o autor propõe um modelo destinado a elaborar o calendário de exames da University of South Pacific-U.S.A.

Para a obtenção de uma solução válida (calendário) são considerados os seguintes aspectos:

#### aspectos necessários

- o calendário de exames não deverá possuir conflitos, isto é, um aluno não pode realizar dois ou mais exames simultaneamente,
- o período de exames não deve ultrapassar o período máximo definido,
- todos os alunos deverão ser acomodados em salas, de acordo com as capacidades das salas;

#### aspectos desejáveis

- os exames com maior número de alunos inscritos devem ser marcados para o início do período de exames, para acelerar o processo de correcção,
- os alunos que efectuem mais de um exame, deverão fazê-los com o maior intervalo de tempo possível entre os diversos exames

O problema é então formalizado como um problema de programação linear inteira que admite a seguinte especificação de parâmetros e variáveis:

#### Parâmetros

$K$  = número de exames

$R$  = número de salas

$S$  = número máximo de sessões de exames

$Q_r$  = capacidade da sala  $r$

$N_i$  = número de alunos inscritos para o exame  $i$

$L_r$  = número máximo de exames a decorrer na mesma sala



$[c'_{ij}]$  matriz de conflitos em que cada elemento representa o número de alunos inscritos simultaneamente no exame  $i$  e no  $j$

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{caso } c'_{ij} > 0 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

### Variáveis

$$x_{irs} = \begin{cases} 1 & \text{caso o exame } i \text{ seja marcado para a sala } r \text{ na sessão } s \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$$y_{ijs} = \begin{cases} 1 & \text{caso os exames } i \text{ e } j \text{ estejam marcados para a sessão } s \text{ e } s+1, \text{ respectivamente} \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Pretende-se encontrar uma matriz  $X = [x_{irs}]$  solução do problema

$$2.21) \quad \text{minimizar } z = \sum_{i=1}^{K-1} \sum_{j=2}^K c'_{ij} (y_{ij1} + y_{ij3} + \dots + y_{ij(S-1)})$$

s.a

$$2.22) \quad \sum_{r=1}^R \sum_{s=1}^S x_{irs} = 1 \quad \text{para } i = (1, \dots, K)$$

$$2.23) \quad \sum_{i=1}^K N_i x_{irs} \leq Q_r \quad \text{para } r = (1, \dots, R), \quad s = (1, \dots, S)$$

$$2.24) \quad \sum_{i=1}^K x_{irs} \leq I_r \quad \text{para } r = (1, \dots, R), \quad s = (1, \dots, S)$$

$$2.25) \quad \sum_{r=1}^R (x_{irs} + x_{jrs}) \leq 2 - \delta_{ij} \quad \text{para } i \neq j \text{ e } s = (1, \dots, S)$$

$$2.26) \quad \sum_{r=1}^R (x_{irs} + x_{jr(s+1)}) \leq y_{ijs} + 1 \quad \text{para } i \neq j \text{ e } s = (1, \dots, S-1)$$

$$2.27) \quad \sum_{r=1}^R (x_{irs} + x_{jr(s+1)}) \leq 2y_{ijs} \quad \text{para } i \neq j \text{ e } s = (1, \dots, S-1)$$

$$2.28) \quad x_{irs} = 0 \text{ ou } 1, \quad y_{ijs} = 0 \text{ ou } 1 \quad \text{para } i = (1, \dots, K), \quad i < j, \quad s = (1, \dots, S)$$

Dada a elevada dimensão do problema resultante desta formalização, cerca de 90 000 variáveis quando aplicada ao caso real referido com 100 exames e 20 sessões, o autor opta pela resolução aproximada através de um processo heurístico idêntico ao utilizado por Eglese e Rand na abordagem anterior. Primeiro, é elaborada uma distribuição inicial dos exames pelas sessões de acordo com a dimensão e conflituosidade dos exames. É posteriormente efectuada uma re-ordenação nas sessões por forma a minimizar o número de exames marcados para o mesmo dia, atribuindo as primeiras sessões aos exames com maior número de alunos. Finalmente, depois de definida a sequência de exames são atribuídas as salas ajustadas à dimensão de alunos de cada exame.

Tal como na abordagem de Eglese e Rand, todo o processo heurístico é efectuado com base num mecanismo de *annealing*.

Outro processo heurístico de resolução do problema de (E.C.E.) é apresentada por Laporte e Desroches (1984). O método desenvolvido foi implementado computacionalmente tendo sido utilizado na École des Hautes Etudes Commerciales de Montréal.

O método elabora um calendário de exames, considerando as mesmas orientações seguidas por Johnson, optando por uma formalização matemática na qual os aspectos considerados necessários são transformados em restrições semelhantes às do modelo anterior, e os aspectos considerados desejáveis originam a função objectivo  $F$ , que integra duas componentes: a primeira ( $F_1$ ) destinada a salvaguardar as preferências de localização temporal de determinados exames, a segunda ( $F_2$ ), com o objectivo de separar o mais possível os diversos exames para cada aluno.

Especificando-se novamente os parâmetros do modelo:

$N_i$  = número de alunos inscritos para o exame  $i$

$i = (1 \dots K)$  com  $K$  número de exames

$t = (1 \dots T)$  com  $T$  número de sessões de exame

$[C_{ij}]$  é uma matriz cujos elementos expressam o número de alunos inscritos simultaneamente nos exames  $i$  e  $j$

$[W_{it}]$  é uma matriz que expressa a preferência pela realização do exame  $i$  na sessão  $t$

$$w_s = \begin{cases} 16 & , s = 1 \\ 8 & , s = 2 \\ 4 & , s = 3 \\ 2 & , s = 4 \\ 1 & , s = 5 \\ 0 & , s \geq 6 \end{cases}$$

é um vector que exprime os custos de proximidade de dois exames

A função objectivo é dada por:

2.29)

$$F = F_1 + F_2$$

com:

2.30)

$$F_1 = \sum_{i=1}^k \sum_{t=1}^T w_{it} x_{it} \cdot N_i$$

2.31)

$$F_2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k \sum_{s=1}^S \sum_{t=1}^T (x_{it} \cdot x_{j(t+s)} + x_{jt} \cdot x_{i(t+s)}) \cdot c_{ij} \cdot w_s$$

Para a resolução deste modelo é definida uma heurística que engloba duas fases distintas. Em primeiro lugar os exames são gradualmente escalonados de forma a provocar aumentos mínimos na função F. O processo termina quando todos os exames tiverem sido atribuídos a sessões, mesmo que para tal seja necessário redistribuir exames já escalonados. Numa segunda fase, a solução é melhorada através de simples trocas de exames pelas sessões, satisfazendo sempre a admissibilidade da solução.

Actualmente, este modelo serve de base a um sistema de calendarização de exames (EXAMINE) elaborado por Carter, Laporte e Chinneck(1994), disponível para microcomputadores (PC). Este sistema além de ser rápido e de fácil aprendizagem e bastante flexível permitindo ao utilizador incorporar directamente as preferências pontuais que julgue oportunas. Outra aplicação computacional semelhante, mas neste caso, aplicada a um computador de médio porte, é o sistema interactivo de elaboração de calendários exames proposto por Romero (1982)

### ***3. Aplicação de redes neuronais na resolução de problemas de Elaboração de Horários Escolares***

#### ***3.1. Introdução***

O interesse pelo estudo do neurónio biológico e pela sua modelização numa base computacional deve-se a McCulloch e Pitts (1943), que num trabalho pioneiro, apresentam pela primeira vez o modelo de um neurónio artificial.

Posteriormente, desenvolveram-se vários trabalhos nesta área até que, durante a década de 60, Minsky e Papert (1969) demonstram a existência de graves limitações nas potencialidades da abordagem neuronal, provocando um generalizado abandono do estudo desta área aplicacional.

Contudo, nos últimos 10 anos, foi possível assistir a um renascimento do interesse pela teoria das redes neuronais. Ultrapassados os obstáculos teóricos encontrados durante os anos 60, podemos assistir actualmente a uma verdadeira proliferação de aplicações envolvendo redes neuronais nalguma das suas múltiplas formas. A este respeito refira-se o a obra de Hertz (1991) e o artigo de Sharda (1994) onde se enumeram uma série de aplicações existentes nesta área.

Este renovado interesse pode ser justificado por diferentes razões.

Ao nível das arquitecturas de computação convencionais (actualmente muito desenvolvidas), baseadas na teoria de Von Neumann privilegiando o processamento em série e o incremento das velocidades de processamento, constatou-se o seguinte paradigma.

Apesar da evidente superioridade existente nos computadores convencionais em termos de velocidade de processamento de operações, em comparação com o verificado nos computadores biológicos (cérebros), verificou-se que os computadores convencionais, falham na execução de determinadas tarefas facilmente desenvolvidas por modestos cérebros biológicos. Efectivamente, apesar de um circuito digital permitir processar uma operação 1.000.000 de vezes mais rápido do que um neurónio biológico, os sistemas

digitais falham por exemplo no reconhecimento de padrões (imagem/som) e na tomada de decisões em contextos de incerteza

Esta situação, levou a repensar a arquitectura utilizada nos computadores convencionais e a analisar em detalhe a estrutura e funcionamento do cérebro biológico

Deste interesse surge a cooperação entre a Neurofisiologia e a Ciência da Computação no sentido de compreender tal paradigma possibilitando o aperfeiçoamento dos computadores convencionais. Seguem-se as principais diferenças encontradas nos computadores biológicos comparativamente aos convencionais.

#### Elevado paralelismo de processamento e velocidade de processamento

O sistemas biológicos compensam a relativa lentidão de processamento mediante um massivo paralelismo. Enquanto que num computador convencional, as operações são executadas sequencialmente a elevada velocidade por um único processador, na versão biológica as operações são distribuídas por todos os processadores (neurónios) que as executam isolada e simultaneamente. Deste modo, o processamento paralelo é uma característica inerente a todos os sistemas biológicos.

Apesar de isoladamente o neurónio se revelar um processador muito lento (em comparação com a versão electrónica, capaz de respostas muito mais velozes), o paralelismo existente nestes sistemas, ultrapassa largamente esta limitação. Como exemplo desta capacidade, podemos referir que num simples visionamento de uma imagem, se estima que o cérebro humano efectue aproximadamente 10.000.000 operações inconscientemente (o que nos dá uma ideia do imenso potencial do cérebro humano). Recentemente foi possível verificar o excelente desempenho de velocidade conseguido por alguns micro-processadores protótipo, que utilizando uma arquitectura neuronal, superaram os micro-processadores convencionais.

#### Capacidade de aprendizagem

Esta interessante característica marca uma diferença essencial em relação a arquitectura clássica, em que todo o conhecimento (procedimentos/regras) é transmitido pelo programador na fase de construção, operando o computador sempre de acordo com esse conjunto fixo de orientações. Contrariamente, os computadores biológicos requerem

uma fase de aprendizagem inicial para que possam operar eficazmente. Esta fase, estende-se durante todo o período de funcionamento do sistema, recolhendo, comparando e modificando toda a informação existente em função dos objectivos desejados.

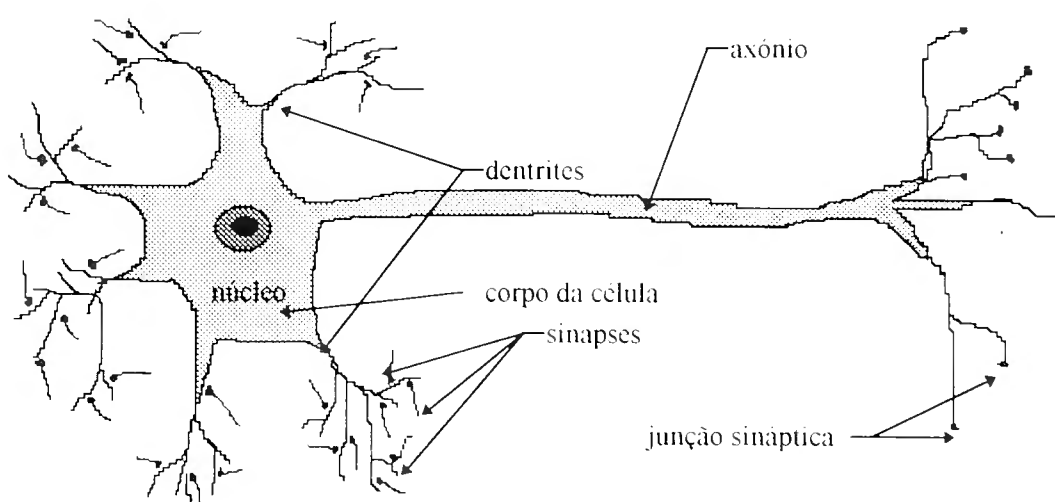
#### Excelente adaptação a contextos de incerteza e elevada complexidade

Os computadores biológicos têm uma natural capacidade para a execução de tarefas complexas onde exista um desconhecimento parcial dos dados. Este potencial decorre naturalmente da capacidade de aprendizagem deste sistema, habilitando o seu uso em aplicações de reconhecimento de padrões. Os sistemas biológicos são bastante eficazes na identificação de semelhanças e minimização de funções, funcionando "intuitivamente" mesmo partindo de informações pouco detalhadas. É esta a principal característica que motiva a utilização desta filosofia na área da optimização.

Reconhecidas as vantagens potenciadas pela arquitectura existente nos sistemas biológicos, interessa observar esquematicamente as estruturas biológicas reais no sentido de permitir a sua eventual reprodução em termos matemáticos.

Simplificadamente, o componente fundamental dos sistemas biológicos - o neurónio pode ser observado no seguinte esquema:

**Figura 3-1 - Representação esquemática de um neurónio**

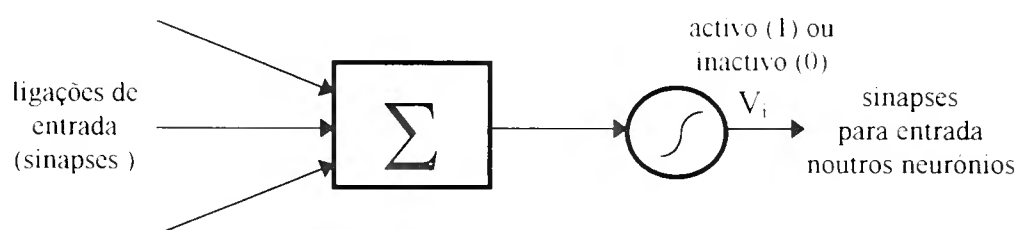


Cada neurónio, é composto por uma célula que recebe, através de um conjunto de ramificações (dendrites), os sinais eléctricos provenientes de outros neurónios. Os sinais

colectados vão sendo acumulados (de uma forma aproximadamente linear) no corpo da célula até que, ultrapassado determinado limite, o neurónio é activado. É então produzida uma descarga eléctrica que se propaga através do axónio até às ligações sinápticas que o conectam aos restantes neurónios. Com o funcionamento continuado deste sistema dinâmico, os pesos das sinapses frequentemente activadas, são reforçados, actuando como ligações amplificadoras de sinal de entrada. Enquanto que, quando activadas com pouca frequência tendem a perder importância, tornando-se ligações inibidoras de sinal. É esta constante mutação de estrutura, que justifica em parte a capacidade de aprendizagem e adaptação dos sistemas biológicos.

Seguindo este funcionamento, modelizou-se o neurónio artificial em termos simbólicos da seguinte forma:

**Figura 3-2 - Modelo de um neurónio artificial**



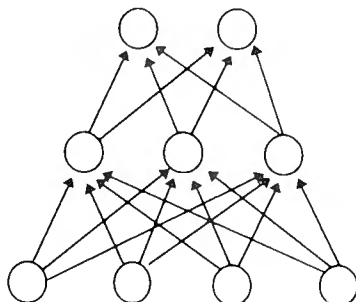
Cada neurónio artificial numa versão simples pode assumir dois estados: 1-activo e 0-inactivo. A cada momento efectua o somatório dos sinais recebidos pelas sinapses ponderados pelos respectivos pesos das ligações sinápticas (positivo ou negativo). Esta soma igual a ( $U_i$ ) é posteriormente introduzida numa função que determina a activação ou não-activação do neurónio, propagando este estado aos neurónios conectados.

Através da interligação de inúmeros destes neurónios, são constituídas as redes neuronais artificiais à semelhança das redes biológicas.

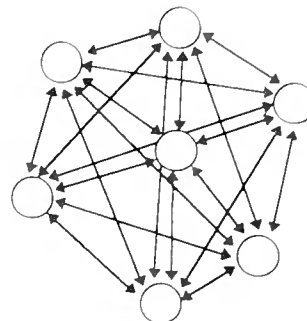
De uma forma geral, quanto maior for o numero de neurónios e a densidade de ligação, maior será a potência computacional do sistema. A título comparativo, sabe-se que o cérebro humano dispõe aproximadamente de um total de  $10^{12}$  neurónios interligados por aproximadamente  $10^{15}$  sinapses.

A forma como são dispostos e conectados os neurónios na estrutura da rede, originou a classificação em dois tipos de arquitectura *feed-forward* e *feed-back*

**Figura 3-3 - Arquitectura *feed-forward***



**Figura 3-4 - Arquitectura *feed-back***



Na arquitectura *feed-forward* é possível verificar que a rede neuronal é formada por vários níveis de neurónios. Os sinais são processados sequencialmente a partir de um primeiro nível de entrada até a um último nível de saída. As ligações sinápticas estabelecem-se entre neurónios situados em níveis consecutivos, sendo estas ligações de carácter unidireccional no sentido do processamento dos sinais.

Por sua vez, na arquitectura tipo *feed-back* não existe uma separação sequencial dos neurónios. As ligações sinápticas são bidireccionais, sendo os sinais de entrada processados geralmente, de uma forma não sequencial e assíncrona. O processo de actualização, decorre até que seja alcançada uma situação globalmente estável.

Do ponto de vista aplicacional, encontramos uma diversidade de modelos baseados em redes neuronais artificiais, implementados para realizar as mais distintas tarefas. Apresentamos de seguida algumas das áreas de aplicação mais relevantes

### Reconhecimento de padrões

Neste amplo campo podem apresentar-se diversas utilizações que vão desde o reconhecimento automático de caracteres manualmente escritos (essencial, por exemplo, no tratamento automático da correspondência) até à identificação de padrões-tipo com aplicação nos mais variados contextos (por exemplo, no diagnóstico empresarial automático para efeitos de concessão de crédito, ou ainda, no reconhecimento de padrões anormais de utilização em operações bancárias com vista à detecção de fraudes). Neste campo devemos incluir ainda as numerosas aplicações que procedem ao reconhecimento



de voz e imagem nos mais variados contextos (por exemplo, no reconhecimento automático de assinaturas)

#### Tratamento, classificação, correlação e previsão sobre dados de natureza complexa

São também relevantes as aplicações que utilizam as vantagens potenciadas por esta nova filosofia na evolução por exemplo dos mercados de produtos financeiros (principalmente Acções e Obrigações)

#### Compressão e recuperação de dados

As propriedades evidenciadas pelas redes neurais artificiais, mostraram-se adequadas à compressão de imagem e som, bem como à recuperação e tratamento de dados incompletos ou muito danificados, com aplicação óbvia no sector das telecomunicações.

#### Optimização

Neste campo cuja referência básica é o trabalho de Hopfield e Tank (1985), a capacidade de "intuição" das redes neurais artificiais é aplicada na resolução de diversos problemas de optimização complexos. De uma forma geral, parece existirem algumas vantagens na abordagem neuronal de alguns problemas de optimização, comparativamente às abordagens tradicionais, especialmente se é possível a sua implementação em computadores com processamento paralelo.

### **3.2. *Redes de Hopfield***

As redes neurais de Hopfield, inicialmente desenvolvidas por Hopfield (1982,1984) tiveram um papel pioneiro na aplicação da tecnologia neuronal aos problemas de optimização. Num trabalho de Hopfield e Tank (1985), é pela primeira vez utilizada a capacidade de computação paralela das redes neurais artificiais na resolução de problemas de optimização - precisamente ao classico problema do caixeiro viajante.

Apesar de aplicada inicialmente com bastantes limitações, ficou demonstrada a potencialidade desta nova abordagem na resolução de problemas de optimização

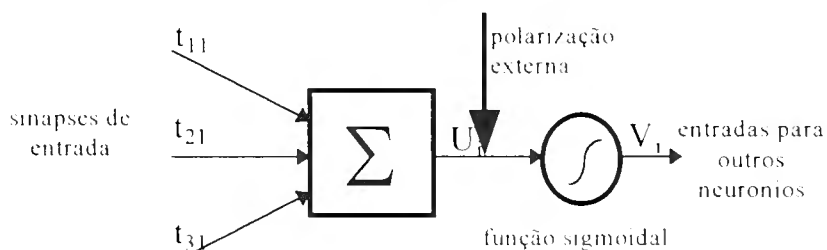
complexos. Posteriormente, diversas modificações por forma a melhorar o desempenho do modelo original de Hopfield e Tank, foram propostas por diversos autores (Brant (1988), Peterson e Soderberg (1989), Bout e Miller (1989), Wilson e Pawley (1988) entre outros)

Através de uma modelização adequada, os problemas de optimização podem ser transpostos numa estrutura neuronal, a qual permite calcular uma solução satisfatória que, no entanto, não é necessariamente optimal nem admissível.

Formalmente a rede de Hopfield é composta por um conjunto de elementos processadores - neurónios - totalmente interconectados correspondendo à arquitectura *feed-back*. Estas conexões - sinapses - têm pesos fixos pré-determinados o que implica que a topologia de rede proposta por Hopfield é não-adaptativa em contraste com os outros modelos de rede referenciados, já que os pesos atribuídos às ligações sinápticas permanecem fixos durante todo o processo evolutivo da rede tradicional de Hopfield.

Individualmente cada neurónio efectua uma soma ponderada pelos respectivos pesos inibidores ou excitadores, dos sinais provenientes de todas as ligações sinápticas de entrada.

**Figura 3-5 - Esquema de um neurónio na rede de Hopfield**



A esta soma é aplicada uma função que determina o estado do neurónio em causa. Se o valor da soma for superior a um determinado potencial proveniente do exterior do neurónio - polarização externa -, este fica activo, caso contrário desactiva-se. De seguida dá-se a propagação do seu estado a todos os restantes neurónios.

Existem dois modelos de rede de Hopfield, o modelo discreto e o modelo contínuo. No modelo discreto os neurónios admitem, tal como até aqui consideramos, dois estados: 0 (inactivo) ou 1 (activo); podendo também ser considerada uma formalização alternativa com os estados -1 (inactivo) e 1 (activo). Este modelo discreto de Hopfield, embora de fácil aplicação, revela-se pouco eficiente na obtenção de soluções para problemas de optimização dado que facilmente se imobiliza em mínimos locais de

fraca qualidade. A versão continua do modelo, na qual é permitida a variação dos estados dos neurónios no intervalo  $(0,1)$  ou no intervalo  $(-1,1)$ , é bastante mais eficiente na fuga a minimos locais fracos. Por essa razão passamos a descrição mais detalhada da versão continua do modelo.

Considerando uma rede com  $N$  neurónios, do tipo contínuo em  $(0,1)$ , a rede evolui num espaço temporal  $\tau$  apresentado em cada momento um vector caracterizador dos estados dos neurónios  $\mathbf{V}(\tau) = (V_1(\tau), V_2(\tau), \dots, V_N(\tau))$ .

A cada sinapse entre dois neurónios é associada uma ponderação expressa na seguinte matriz simétrica  $T = [t_{ij}]$  em que  $t_{ij}$  representa a ponderação de ligação existente entre o neurónio  $i$  e  $j$ , com  $i, j = 1, \dots, N$ . Se  $t_{ij} > 0$  a sinapse diz-se excitadora e se  $t_{ij} < 0$  a sinapse considera-se inibidora.

Designando por  $V_k$  o estado à saída do neurónio  $k$  e por  $I_i$  a intensidade de polarização externa no neurónio  $i$ , na entrada do neurónio  $i$  apresenta-se um sinal dado por:

$$3.1) \quad U_i = \sum_{k=1}^N t_{ki} V_k + I_i$$

verificando-se à saída do neurónio  $i$  um sinal dado pela aplicação da seguinte função sigmoidal:

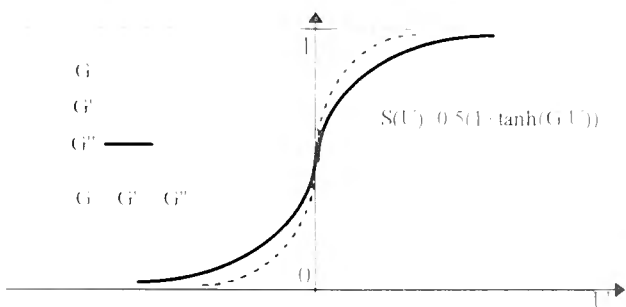
$$3.2) \quad V_i = S(U_i) = \frac{1}{2} (1 + \tanh(G \cdot U_i))$$

em que  $G$  é um factor de ganho.

Esta função sigmoidal  $S(U)$  tem um comportamento particular que pretende reproduzir o padrão de resposta face a um estímulo de um neurónio de um cérebro real.

Tal função aproxima-se assintoticamente de 1 para valores de somas de entrada positivas, e de 0 para somas de entrada negativas, dependendo de um parâmetro  $G$  para definir o seu achatamento na origem. Para diferentes valores de  $G$  é possível definir o nível de amplificação ou ganho dos potenciais de entrada aplicados (ver Figura 3-6). No caso extremo em que  $G \rightarrow +\infty$  o modelo contínuo aproxima-se da sua versão discreta.

Figura 3-6 - Função sigmoidal



Em cada momento  $\tau$ , o potencial total energético concentrado na rede neuronal é dado pela seguinte função de energia:

3.3) 
$$E_{\tau}(\mathbf{V}) = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N t_{ij} V_i V_j - \sum_{i=1}^N I_i V_i + \sum_{i=1}^N \frac{1}{R_i} \int_{V_i}^{U_i} S_i^{-1}(V) dV$$

sendo  $R_i$  um parâmetro designando a resistência de entrada no neurónio  $i$ .

Esta função tem um papel fundamental na resolução de problemas de optimização através de redes neuronais. Hopfield (1984) provou que se a matriz das ligações sinápticas for simétrica esta função de energia é uma função de Lyapunov. Provou ainda, que utilizando um processo particular de actualização da rede, a energia existente decresce ao longo do tempo. Consequentemente, todas as funções de energia com estas características tendem a estabilizar num estado correspondente a um ponto de estacionaridade o qual pode ser um mínimo energético da rede, bastando para isso proceder à constante actualização dinâmica dos seus neurónios até que se atinja esse ponto de estabilização.

Interessa assim analisar as equações diferenciais que, de acordo com Hopfield, determinam a evolução dinâmica da rede e a respectiva actualização de cada neurónio:

3.4) 
$$\frac{dU_i}{d\tau} = -\frac{U_i}{k} + \sum_{j=1}^N t_{ji} V_j + I_i$$

(onde a primeira parcela representa a perda de potencial à entrada do neurónio  $i$  em função do tempo,  $k$  é a chamada constante de tempo)

3.5) 
$$V_i = \frac{1}{2} (1 + \tanh(G_i U_i))$$

No modelo proposto por Hopfield, a evolução verificada num neurónio é decomposta em três componentes (parcelas) distintas. A primeira representa a perda de sinal existente à entrada no neurónio  $i$ , sendo  $k$  uma constante de tempo. Na realidade nos neurónios biológicos existe esta perda de sinal ao longo tempo.

A segunda parcela, representa o fluxo de sinais transmitidos pelos restantes neurónios através das diversas sinapses (excitadoras ou inibidoras), sendo colectados a entrada do neurónio  $i$ .

Por último, a variação do estado de um neurónio é também determinada pela intensidade da polarização externa que esse neurónio particular recebe do exterior. O valor desta polarização (positiva ou negativa) influencia a totalidade de sinal recebido no neurónio e a sua eventual activação.

Estas equações (3.4 e 3.5) expressam a capacidade minimizadora que é a base da utilização da rede neuronal de Hopfield em optimização.

Na prática, as equações diferenciais não-lineares (3.4) são resolvidas numericamente geralmente por utilização do método aproximado de Euler (ver por exemplo Braun, 1975).

Para proceder à abordagem de um problema de optimização por intermédio desta metodologia devem ser seguidas etapas que descreveremos detalhadamente no próximo ponto.

### **3.3. *Formalização do problema de (E.H.E.) em termos de redes neurais de Hopfield***

Na formalização de qualquer problema de optimização, em particular do problema de Elaboração de Horários Escolares, em termos de uma rede neuronal de Hopfield procedemos de acordo com as seguintes etapas, baseadas na metodologia proposta por Ramanujam e Sadayappan (1988).

#### 1ª Etapa - Definir uma representação do problema em termos neurais

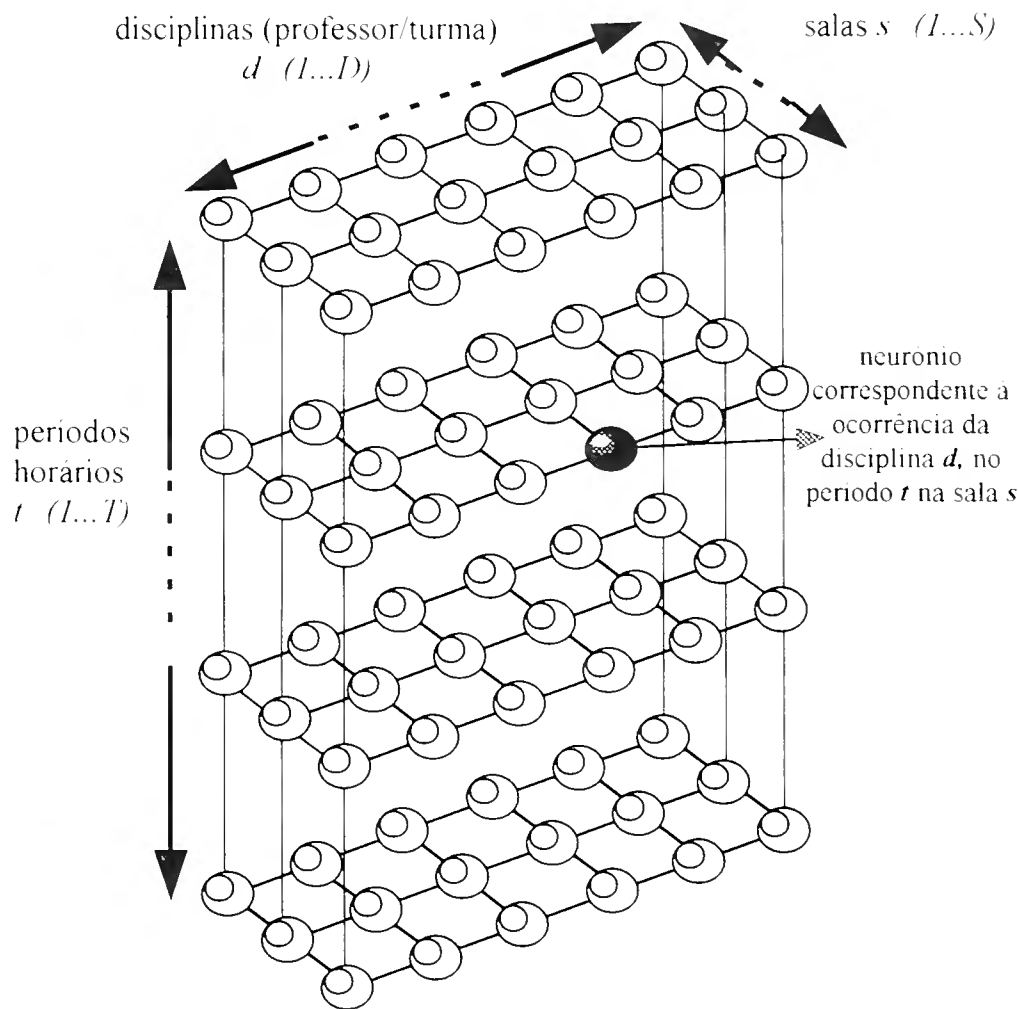
Nesta fase procurou-se modelizar o problema utilizando os elementos constituintes de uma rede neuronal. Cada variável inicial do problema de horários requer uma associação a um neurónio, para que no final do processo de optimização (quando a rede

se imobilizar num estado estável) seja possível a descodificação do estado da rede numa solução do problema de optimização. Dado que a anterior formalização do problema em termos de programação matemática utilizou somente variáveis binárias a sua modelização através de neurónios é directa. No estado final um neurónio inactivo implica que a variável associada toma o valor nulo, inversamente a um neurónio activo corresponde um valor unitário para a variável original.

Considerando os três conjuntos de recursos envolvidos: períodos horários (tempos), salas e disciplinas (pares professor/turma), a cada combinação destes elementos é atribuído um neurónio  $N_{sala, disciplina, tempo}$  que assumirá o estado  $x_{s,d,t} = 1$  (activo) caso a combinação se verifique, e tomará o estado  $x_{s,d,t} = 0$  (inactivo) caso contrário.

Torna-se deste modo necessário para a completa codificação do problema, a construção de uma rede formada por  $(S \cdot D \cdot T)$  neurónios.

Figura 3-7 - Esquema de uma rede neuronal para o problema (E.H.E.)



Esquemáticamente é este o modelo utilizado para representar o problema de (E.H.E.) numa estrutura neuronal. É oportuno referir que tal conjunto de neurónios se encontra densamente interconectado de uma forma particular que descreveremos posteriormente na 3ª Etapa. Por questões de simplificação gráfica não foram representadas na figura todas as eventuais ligações (sinapses de peso  $t_{ij}$ ), nem as polarizações externas  $I_i$ .

## 2ª Etapa - Seleccionar uma função de energia apropriada

A função de energia total numa rede neuronal assume um papel fundamental em toda a dinâmica de funcionamento do processo de optimização e, consequentemente, na sua eficiência. É através da função de energia que a rede "aprende" globalmente a procurar soluções de qualidade para o problema. A partir desta função são definidas todas as ligações e polarizações dos neurónios, bem como as equações que determinam as regras de actualização dos estados dos neurónios da rede.

A principal característica requerida para a função de energia consiste no facto de ao seu mínimo corresponder a solução óptima do problema original. A função de energia terá uma forma particular que implicará, através da sua minimização, um favorecimento de soluções de melhor qualidade para o problema de horários. Se as condições definidas por Hopfield se verificarem, então é assegurada a convergência para um ponto de estabilidade o qual pode corresponder a um mínimo local ou mesmo à solução óptima do problema de optimização.

Atendendo a estes condicionalismos, resta-nos transpor todas as orientações caracterizadoras do problema de (E.H.E.), anteriormente expressas na secção (1.2), para uma função de energia total. Parte-se do modelo formalizado em P.N.L. Binária para a elaboração de uma função de energia apropriada à resolução do problema a qual é decomposta em duas componentes distintas.

A primeira componente, resultante da incorporação de todas as orientações definidas na função objectivo do modelo apresentado, é formada por parcelas cuja minimização favorece a obtenção de horários de melhor qualidade. A cada grupo destas parcelas é associado um ponderador que permite controlar a importância relativa de cada aspecto da função objectivo.

A segunda componente, originada pela incorporação de todo o conjunto de restrições anteriormente definido, traduz-se em várias parcelas que minimizadas asseguram a verificação das restrições enunciadas e a consequente admissibilidade da solução. De forma idêntica, são atribuídos ponderadores a cada grupo de parcelas originadas pelas diferentes restrições.

Deste modo, a função de energia adaptada ao problema de horários resulta numa agregação numa só função de todas as orientações (função objectivo e restrições) previamente formuladas. O balanceamento entre a importância da função objectivo e das restrições é agora efectuado através da manipulação dos ponderadores associados a cada uma destas componentes.

Para a elaboração da função de energia, é necessário proceder a recodificação das restrições anteriormente apresentadas na secção (1.3), na forma de parcelas cuja anulação corresponde à sua integral satisfação, ou seja a uma solução admissível do modelo.

Seguem-se as restrições do modelo de P.N.L. Binário e as correspondentes reformulações para integração na função de energia.

A primeira restrição

$$(3.6) \quad \sum_{t=1}^T x_{s,t} \leq 1 \quad \text{para } s = (1 \dots S) \text{ e } t = (1 \dots T)$$

originara  $S \cdot T$  parcelas da forma

$$(3.7) \quad \sum_{s=1}^S \sum_{t=1}^T (x_{s,t} - x_{s,t+1})$$

A segunda restrição

$$(3.8) \quad \sum_{t=1}^T \sum_{p=1}^P x_{s,t,p} \leq 1 \quad \text{para } t = (1 \dots T), p = (1 \dots P)$$

formara  $T \cdot P$  parcelas do tipo

$$(3.9) \quad \sum_{s=1}^S \sum_{t=1}^T \sum_{p=1}^P (x_{s,t,p} - x_{s,t,p+1})$$



A terceira restrição

$$(3.10) \quad \sum_{d=1}^D \sum_{d'=d+1}^D \sum_{s=1}^S I_{dd'} x_{sdt} x_{sdt'} = 0 \quad \text{para } t = (1 \dots T)$$

originará  $T$  parcelas de tipo

$$(3.11) \quad \sum_{d=1}^D \sum_{d'=d+1}^D \sum_{s=1}^S (I_{dd'} x_{sdt} x_{sdt'})$$

A quarta restrição

$$(3.12) \quad \sum_{s=1}^S \sum_{t=1}^T x_{sdt} = N_d \quad \text{para } d = (1 \dots D)$$

gerará  $D$  parcelas do tipo

$$(3.13) \quad \left( \sum_{s=1}^S \sum_{t=1}^T x_{sdt} - N_d \right)^2$$

A quinta restrição

$$(3.14) \quad \sum_{d=1}^D \sum_{s=1}^S C_{sd} x_{sdt} = 0 \quad \text{para } t = (1 \dots T)$$

gerará  $T$  parcelas na forma:

$$(3.15) \quad \sum_{d=1}^D \sum_{s=1}^S (C_{sd} x_{sdt})$$

Quanto à sexta restrição

$$(3.16) \quad \sum_{s=1}^S \sum_{t=1+10h}^{10+10h} x_{sdt} \leq M_d \quad \text{para } d = (1 \dots D) \text{ e } h = (0,1,2,3,4)$$

criará parcelas  $5D$  do tipo:

$$(3.17) \quad \lambda_{d,h} \left( \sum_{s=1}^S \sum_{t=1+10h}^{10+10h} x_{sdt} - M_d \right)^2 \quad \text{onde } \lambda_{d,h} = \begin{cases} 0 & \text{caso } M_d \geq \sum_{s=1}^S \sum_{t=1+10h}^{10+10h} x_{sdt} \\ 1 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

A sétima restrição

$$(3.18) \quad \sum_{d \in \text{disc}(P)} \sum_{t=5+10h}^{6+10h} \sum_{s=1}^S x_{sdt} \leq 1 \quad \text{para } p = (1 \dots P) \text{ e } h = (0,1,2,3,4)$$

originará  $5P$  parcelas na forma

$$(3.19) \quad \sum_{t=S+10h}^{6+10h} \sum_{t'=t} \left( \left( \sum_{d \in \text{disc}(p)} \sum_{s=1}^S x_{sdt} \right) \left( \sum_{d' \in \text{disc}(p)} \sum_{s'=1}^S x_{s'dt'} \right) \right)$$

As últimas restrições,

$$(3.20) \quad \sum_{d \in \text{disc}(c)} \sum_{c=1}^S \sum_{t=S+10h}^{6+10h} x_{sdt} = 1 \text{ para } c = (1 - C) \text{ e } h = (0,1,2,3,4)$$

criarão  $5C$  parcelas do tipo

$$(3.21) \quad \sum_{t=S+10h}^{6+10h} \sum_{t'=t} \left( \left( \sum_{d \in \text{disc}(c)} \sum_{s=1}^S x_{sdt} \right) \left( \sum_{d' \in \text{disc}(c)} \sum_{s'=1}^S x_{s'dt'} \right) \right)$$

Efectuada a recodificação das restrições é possível proceder, introduzindo a F.O (1.1), a definição da função de energia:

$$(3.22) \quad \text{Energia}(\mathbf{x}) = \frac{\alpha}{2} \sum_{p=1}^P \sum_{t=1}^I \sum_{t'=t} B_{pt} \left( \sum_{s=1}^S \sum_{d \in \text{disc}(p)} x_{sdt} \right) \left( \sum_{s'=1}^S \sum_{d' \in \text{disc}(p)} x_{s'dt'} \right) +$$

$$\frac{\beta}{2} \sum_{t=1}^I \sum_{t'=t} \sum_{c=1}^C B_{ct} \left( \sum_{s=1}^S \sum_{d \in \text{disc}(c)} x_{sdt} \right) \left( \sum_{s'=1}^S \sum_{d' \in \text{disc}(c)} x_{s'dt'} \right) +$$

$$\frac{\delta}{2} \sum_{p=1}^P \sum_{t=1}^I G_{pt} \left( \sum_{s=1}^S \sum_{d \in \text{disc}(p)} x_{sdt} \right) +$$

$$\frac{A}{2} \sum_{t=1}^I \sum_{s=1}^S \sum_{d=1}^D \sum_{d'=d} (x_{sdt} - x_{sdt'}) +$$

$$\frac{B}{2} \sum_{t=1}^I \sum_{p=1}^P \sum_{\substack{d \in \text{disc}(p) \\ s \in S}} \sum_{\substack{d' \in \text{disc}(p) \\ s' \in S}} (x_{sdt} - x_{s'dt'}) +$$

$$+ \frac{C}{2} \sum_{t=1}^I \left( \sum_{d=1}^D \sum_{d'=d} \sum_{s=1}^S (I_{sdt} - x_{sdt} - x_{sdt'}) \right) +$$

$$\frac{D}{2} \sum_{d=1}^D \left( \sum_{s=1}^S \sum_{t=1}^I x_{sdt} - N_d \right)^2 +$$

$$\frac{E}{2} \sum_{t=1}^I \left( \sum_{d=1}^D \sum_{s=1}^S (C_{sdt} - x_{sdt}) \right) +$$

$$\frac{F}{2} \sum_{d=1}^D \sum_{h=0}^4 \lambda_{dh} \left( \sum_{t=1}^I \sum_{t'=1+10h}^{6+10h} x_{sdt} - M_d \right)^2 +$$

$$\frac{G}{2} \sum_{p=1}^P \sum_{h=0}^4 \sum_{t=S+10h}^{6+10h} \sum_{t'=t} \left( \left( \sum_{d \in \text{disc}(p)} \sum_{s=1}^S x_{sdt} \right) \left( \sum_{d' \in \text{disc}(p)} \sum_{s'=1}^S x_{s'dt'} \right) \right) +$$

$$\frac{H}{2} \sum_{c=1}^C \sum_{h=0}^4 \sum_{t=S+10h}^{6+10h} \sum_{t'=t} \left( \left( \sum_{d \in \text{disc}(c)} \sum_{s=1}^S x_{sdt} \right) \left( \sum_{d' \in \text{disc}(c)} \sum_{s'=1}^S x_{s'dt'} \right) \right)$$

Note-se que se ignorou o último termo da equação de energia (Eq. 3.3) porque apenas estamos interessados no estado final da rede no qual se assume que tal termo é nulo. De facto Hopfield provou que quando  $t \rightarrow +\infty$  este termo se anula.

A primeiras três parcelas associadas, respectivamente aos ponderadores  $(\alpha, \beta$  e  $\delta)$ , correspondem à activação das diferentes orientações da função objectivo. As restantes parcelas, a que se associaram os ponderadores  $(A, B, C, D, E, F, G$  e  $H)$ , correspondem às diferentes restrições consideradas. Estas parcelas serão nulas quando os requerimentos a que respeitam se encontrem satisfeitos.

Através de uma escolha adequada deste conjunto de ponderadores, é possível modificar o grau relativo de importância de cada uma das orientações consideradas no modelo, influenciando deste modo a " direcção " de pesquisa de solução.

Ao contrário do modelo original de Hopfield e Tank, caracterizado como não adaptativo, na medida em que estes ponderadores são fixos durante todo o processo, optámos neste trabalho por introduzir um sistema de ponderadores variáveis, introduzindo alguma adaptabilidade na rede neuronal de Hopfield. Através deste sistema, que se limita aos ponderadores associados às restrições, pretendeu-se melhorar a capacidade do modelo em admissibilizar as soluções. Basicamente os ponderadores são modificados de acordo com o nível de satisfação da restrição associada. Uma restrição que se encontre fortemente "violada" provocará um incremento no ponderador associado, obrigando a uma potencial satisfação dos seus requerimentos, inversamente, uma restrição verificada fará diminuir o ponderador correspondente, aumentando a liberdade de pesquisa de soluções noutras " direcções ". Exemplificando para o ponderador  $A$ , temos:

$$3.23) \quad \text{"violação total"} = \psi = A(\text{parcelas da 1ª restrição}) + \dots + H(\text{parcelas da última restrição})$$

a actualização do ponderador  $A$ , é efectuada do seguinte modo:

$$3.24) \quad A^{iterações} = Pfix_A + \frac{A^{iterações}(\text{parcelas da 1ª restrição})}{\psi} \cdot Pvar$$

com  $(P'fix_i)$  sendo a parcela fixa do ponderador  $A$  e  $(P'var)$  a parcela variável do ponderador  $A$  atribuída de acordo com o seu peso na "violação total"

Com a introdução deste sistema obtiveram-se melhorias evidentes, quer em termos velocidade de convergência para uma solução, quer ao nível da própria qualidade da solução encontrada (a percentagem de soluções admissíveis obtidas, aumentou cerca de 45%), quando comparado com o modelo de ponderadores fixos proposto por Hopfield.

### 3º Passo- Definição das ligações sinápticas entre os neurónios e da intensidade das polarizações externas.

Estabelecidas as componentes da função de energia, a determinação dos pesos das ligações sinápticas  $[t_{ij}]$  entre os diferentes neurónios e a intensidade das polarizações externas  $I_i$  faz-se pelo desenvolvimento da função de energia. Observando a forma da função de energia proposta por Hopfield (Eq.3.3), verificamos que aos termos do segundo grau da equação correspondem as ligações sinápticas  $[t_{ij}]$ , enquanto que aos termos lineares se associam os valores de intensidade de polarização  $I_i$  introduzidos externamente nos neurónios.

Para determinar este conjunto de parâmetros neuronais referentes ao problema de (E.H.E.), é necessário decompor a função de energia escolhida por estes dois tipos de ligação identificando quais os valores de ligação necessários à correcta codificação do problema de horários ao nível dos neurónios. A definição do conjunto destas ligações para cada neurónio permitirá que este avalie individualmente a sua contribuição para a solução global. Ao contrário de outras topologias de redes neuronais *feed-forward* onde existe um processo de aprendizagem explícito e contínuo que basicamente se traduz numa constante actualização das ligações aos neurónios, na rede neuronal de Hopfield todo o "conhecimento" é previamente transmitido para os neurónios sob a forma de ligações fixas e pré-determinadas.

Procedendo à decomposição das diferentes parcelas da função de energia com base em termos quadráticos e termos lineares identificamos todo o conjunto de ligações requeridas. Dada a diversidade e complexidade de ligações encontradas optou-se aqui pela identificação separada das ligações originadas por cada parcela da função de energia.

A primeira parcela originará termos quadráticos correspondentes a ligações inibidoras no valor de  $-(\alpha B_{tt'})$  entre cada par de neurónios pertencentes a períodos distintos ( $t$  e  $t'$ ), para o conjunto de disciplinas leccionadas por cada professor. Esta inibição relaciona-se com a qualidade dos horários obtidos para os professores.

A segunda parcela, cuja finalidade é semelhante a anterior (neste caso para os alunos), criará ligações inibidoras de valor  $-(\beta B_{tt'})$ , entre cada par de neurónios pertencentes a períodos distintos ( $t$  e  $t'$ ), para o conjunto de disciplinas assistidas por cada turma.

A terceira parcela, avalia o cumprimento das disponibilidades de cada um dos professores, originando termos lineares correspondentes a polarizações externas de intensidade  $-(\alpha I_{pt})$  nos neurónios pertencentes ao professor  $p$  no período  $t$ , reflectindo assim a disponibilidade desse professor no período  $t$ .

A parcela referente à ocupação das salas (no máximo uma ocupação em cada período) é composta por termos quadráticos que definem ligações sinápticas inibidoras de valor  $-(A)$  entre neurónios correspondentes à mesma sala num determinado período.

De uma forma análoga, a quinta parcela composta também por termos quadráticos, define ligações sinápticas inibidoras de valor  $-(B)$  entre neurónios correspondentes ao mesmo professor num dado período.

A sexta parcela, resultante da restrição de incompatibilidades entre professores e entre turmas origina termos quadráticos responsáveis pela conexões inibidoras de valor  $-(C)$  existentes entre neurónios que representam conflitos quer ao nível dos professores quer ao nível das turmas, para cada período.

A sétima parcela, resultante da codificação da quarta restrição, dada a sua estrutura origina ligações sinápticas inibidoras de valor  $-(D)$  entre todos os neurónios associados à mesma disciplina e ainda uma polarização externa de intensidade  $+(D.N_d)$  para cada neurónio pertencente à disciplina  $d$ .

A oitava parcela, obtida da restrição que assegura a compatibilidade entre sala e disciplina, leva à criação de termos lineares que resultam em polarizações externas com

intensidade  $-(I_{ji})$  nos neurónios representativos da ocorrência da disciplina  $d$  na sala  $s$ , em cada um dos períodos

A nona parcela, dada a forma utilizada na recodificação para a função de energia, tem uma particularidade: as ligações originadas por esta parcela estão sujeitas a uma activação/desactivação específica. Tanto as sinapses inibidoras de valor  $-(I)$  como as polarizações externas de intensidade  $+(I \cdot M_d)$  existentes entre neurónios pertencentes ao mesmo dia, só serão activadas quando o total diário dos estados dos neurónios numa determinada disciplina  $d$  exceder  $M_d$ .

As duas últimas parcelas, resultantes das restrições que asseguram a existência de um período para almoço nos horários dos professores e dos alunos, originam respectivamente ligações sinápticas inibidoras de valores  $-(G)$  e  $-(H)$ . Estas ligações limitam-se aos neurónios correspondentes aos períodos horários envolvidos, para cada professor e turma.

#### 4ºPasso- Determinar as equações de funcionamento da rede neuronal

Definida a rede neuronal (neurónios e respectivas ligações), resta determinar as equações que simulam a evolução do estado de cada um dos neurónios ao longo do tempo.

Retomando a equação de evolução dos neurónios apresentada anteriormente (3.4) constatamos o seguinte:

$$(3.25) \quad \frac{dU_i}{d\tau} = -\frac{U_i}{k} + \sum_{j=1}^N t_{ji} x_j + I_i$$

A equação de actualização dinâmica do estado de um neurónio na rede de Hopfield foi transposta para o problema de (E.H.E.) em causa. Feitas as adaptações necessárias, e utilizando as ligações sinápticas e de polarização externa definidas no ponto anterior, a equação que descreve a evolução de um neurónio é a seguinte:

$$\begin{aligned}
 3.26) \quad \frac{dU_{sdt}}{d\tau} = & -\frac{U_{sdt}}{k} - \alpha \left( \sum_{t \in t} B_{dt} \left( \sum_{s \in S} \sum_{p \in P(d)} x_{sdt} \right) \right) - \beta \left( \sum_{t \in t} B_{dt} \left( \sum_{s \in S} \sum_{p \in P(d)} x_{sdt} \right) \right) \\
 & - \delta \left( G_{p(d),t} - A \sum_{d' \in d} x_{sdt} - B \left( \sum_{\substack{s \in S, d' \in discP(p,d) \\ (s,d') \in (s,d)}} x_{sdt} \right) - C \sum_{d' \in d} \sum_{s \in S} (I_{dd'} x_{sdt} x_{sdt}) \right) \\
 & - D \left( \sum_{s \in S} \sum_{t \in t} x_{sdt} - N_d \right) - E \left( C_{sd} - F \left( \lambda_{d,h} \left( \sum_{s \in S} \sum_{t \in Dia(t)} x_{sdt} - M_d \right) \right) \right) \\
 & - \phi_i \sum_{t \in t} \left( \sum_{d' \in discP(p(d))} \sum_{s \in S} x_{sdt} \right) - - \phi H \sum_{t \in t} \left( \sum_{d' \in discP(p(d))} \sum_{s \in S} x_{sdt} \right)
 \end{aligned}$$

com:

$Dia(t)$  conjunto de períodos pertencentes aos dia  $t$

$p(d)$  professor afecto à disciplina  $d$

$c(d)$  classe afecta à disciplina  $d$

$T_{alm} = \{5,6,15,16,25,26,35,36,45,46\}$

$$\phi = \begin{cases} 1 & \text{caso } t \in T_{alm} \\ 0 & \text{caso contrario} \end{cases}$$

Na dedução desta equação o 2º membro devia resultar, segundo Hopfield, do cálculo de  $\frac{\partial E}{\partial x_{sdt}}$ . Como  $\lambda_{d,h}$  que surge na 9ª parcela e que foi definido em (3.17) é uma função discreta de  $x$ , consideramos na dedução desta equação que  $\lambda_{d,h}$  é uma constante.

Para integrar numericamente esta equação diferencial não linear segundo o metodo de Euler vamos considerar um  $\Delta\tau$  suficientemente pequeno para o qual podemos escrever:

$$3.27) \quad \frac{\Delta U_{sdt}}{\Delta\tau} \cong \frac{dU_{sdt}}{d\tau} = -\frac{U_{sdt}}{k} - \sum_{s \in S} \sum_{t \in t} I_{sdt} x_{sdt} + I_{sdt}$$

ou ainda:

$$3.28) \quad \Delta U_{sdt} = \left( -\frac{U_{sdt}}{k} - \dots \text{restantes parcelas} \right) \Delta\tau$$

assim actualizando  $U_{sdt}$  iterativamente

$$(3.29) \quad U_{sdt}^{t+1} = U_{sdt}^t + \Delta U_{sdt} = U_{sdt}^t + \left( -\frac{U_{sdt}^t}{k} + \text{restantes parcelas} \right) \Delta \tau$$

Segundo Wilson e Pawley (1988) se definirmos a constante de tempo ( $k = \Delta \tau$ ) o sistema torna-se muito oscilatório dificultando a sua convergência para estados estáveis e minimizadores da função de energia.

Para que se consiga uma eficiente simulação da rede neuronal é necessário, segundo estes autores, que o sistema seja actualizado em intervalos de tempo fraccionários da constante de tempo definida. Fixam-se assim, sem perder generalidade,  $k = 1$  e  $\Delta \tau = 0.0001$ .

Por fim, ao valor actualizado é aplicada a função sigmoideal que determina o estado final do neurónio na iteração  $(t + 1)$ :

$$(3.30) \quad x_{sdt}^{t+1} = \frac{1}{2} (1 + \tanh((i, U_{sdt}^{t+1})))$$

Na escolha do esquema de actualização de cada neurónio, colocam-se várias opções. Ao nível do momento de actualização pode seguir-se um modelo de actualização síncrono ou assíncrono. No modelo síncrono, procede-se em primeiro lugar ao cálculo de todas as correntes de entrada ( $U_i$ ) para em seguida se determinar, simultaneamente, o estado ( $V_j$ ) para todos os neurónios. No modelo assíncrono, cada neurónio procede individualmente ao cálculo da sua corrente de entrada ( $U_i$ ) e do seu correspondente estado ( $V_j$ ), ficando este, imediatamente disponível para a determinação das correntes de entrada ( $U_i$ ) dos seguintes neurónios a serem actualizados.

Em relação à ordem de actualização pode seguir-se um esquema sequencial, onde se procede à actualização de acordo com uma sequência fixa e pre-determinada, ou por uma esquema aleatório no qual se escolhe aleatoriamente o neurónio a proceder à actualização.



### **3.4. Implementação Computacional**

#### **3.4.1. Considerações Introdutórias**

Ao nível da implementação computacional do algoritmo neuronal proposto é necessário efectuar algumas considerações iniciais.

Em primeiro lugar, como já foi referido, as redes neurais artificiais caracterizam-se por um elevado paralelismo de processamento, requerendo para a sua eficiente aplicação de um computador com capacidade de processamento em paralelo.

Actualmente, não existem ainda disponíveis no mercado microinformático computadores baseados nesta arquitectura paralela, existindo apenas alguns modelos de carácter experimental desenvolvidos para o estudo do potencial desta nova filosofia computacional.

Por este motivo, fomos obrigados a simular o funcionamento de um computador de arquitectura paralela num computador de arquitectura digital (processamento em série).

Esta adaptação tem na prática diversas implicações. Por um lado é possível usar recursos já existentes (os convencionais computadores digitais) na implementação da maioria dos problemas relacionados com redes neurais artificiais. Contudo o tipo de programação necessária à simulação da estrutura paralela num computador digital, obriga a uma diminuição acentuada da sua velocidade global de computação.

Em segundo lugar, ainda não foi possível elaborar um estudo comparativo rigoroso entre a eficiência dos algoritmos ditos neuronais e os convencionais, já que a maioria das implementações de redes neurais artificiais são simuladas em computadores digitais. No entanto, apesar desta limitação, são conseguidos desempenhos muito satisfatórios quando comparados com outras abordagens alternativas de resolução. Este facto leva-nos a supor que, apartir do momento em que os computadores de arquitectura paralela se encontrem disponíveis no mercado, os algoritmos de natureza neuronal possam ser adequadamente implementados ultrapassando largamente em desempenho os algoritmos de processamento não paralelo.

O software de simulação para a rede neuronal artificial formulada foi programado em linguagem C (Borland C++, Versão 3.1).

Para a execução do programa foi utilizado um microcomputador (PC) com as seguintes características.

- Sistema Ms-Dos 6.00
- Megabytes Ram
- Processador DX2 66Mhz.

### 3.4.2. Descrição do algoritmo

O Algoritmo, cujo fluxograma é apresenta na (Figura 3-8), pode ser dividido nos seguintes módulos.

Nos primeiros três módulos são definidos os parâmetros e variáveis utilizadas no decurso do algoritmo. Nomeadamente, são inicializados os ponderadores iniciais (relativos à função objectivo e as diferentes restrições) e a variável (*Ganho*)

O conjunto de dados que define o problema é também introduzido nesta fase plano curricular, compatibilidade entre disciplinas, disponibilidade dos professores, etc

São ainda inicializadas as variáveis:

*Iteração* - contador de iterações na pesquisa corrente

*MaxIter* - número máximo de iterações numa pesquisa

*MSol* - regista a melhor solução até ao momento

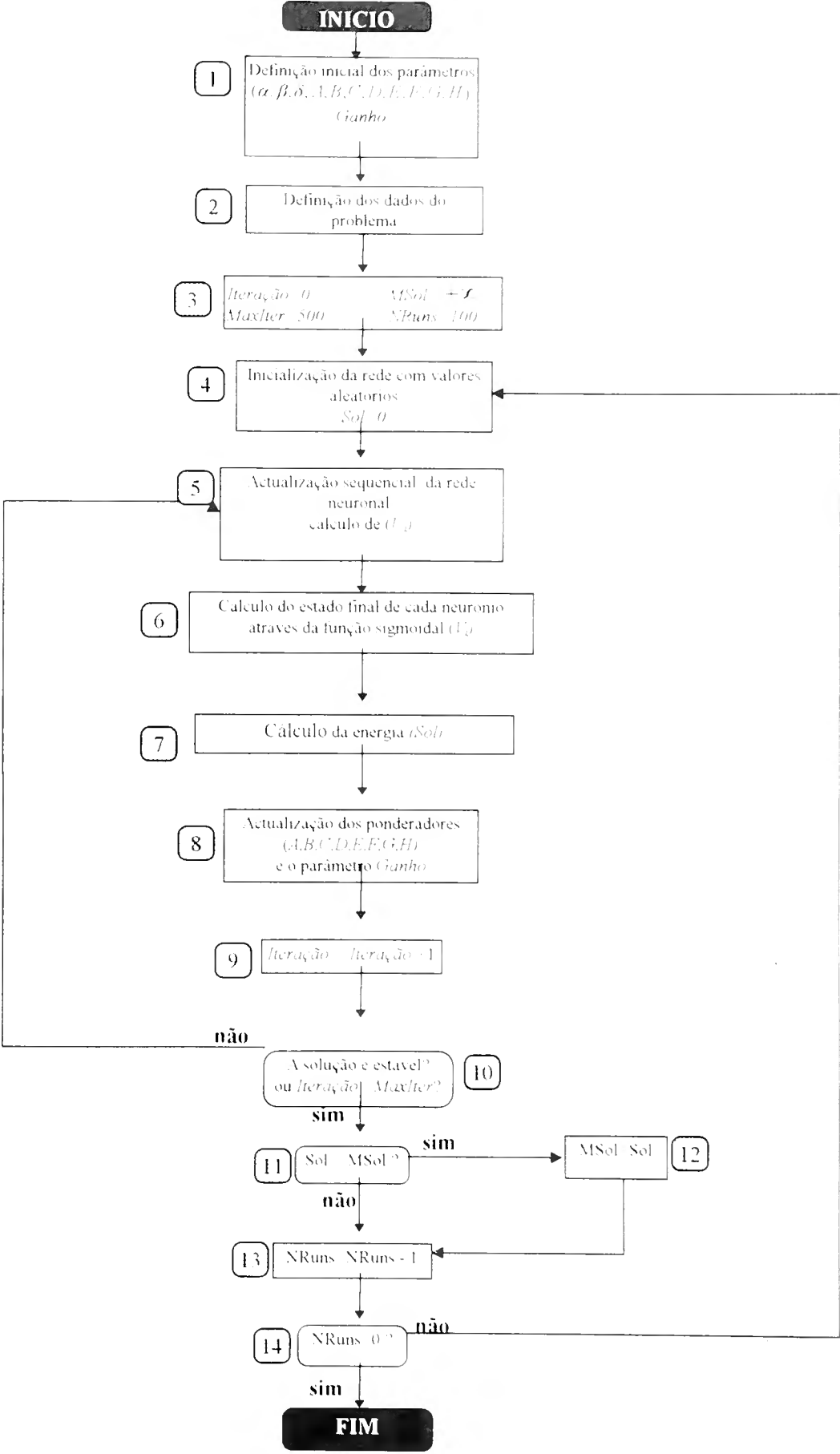
*NRuns* - número total de pesquisas.

No quarto módulo a rede neuronal é inicializada com valores aleatórios. Esta inicialização aleatória dos neurónios foi efectuada adaptando o sistema utilizado por Wilson e Pawley para o T.S.P., no qual os neurónios são inicializados com um total de valores aleatórios aproximadamente igual ao total de neurónios activos pretendidos na solução final. Com este procedimento pretende-se acelerar o processo de convergência da rede neuronal para as eventuais soluções.

Em simultâneo com a definição de uma solução de partida, é inicializado o valor de energia correspondente à essa solução (*Sol*).

No quinto procedimento, o estado de cada neurónio é individualmente actualizado de acordo com as equações apresentadas anteriormente (Eq. (3.29) e (3.30)). Optou-se por um esquema de actualização sequencial e síncrono, dada a sua maior rapidez e facilidade de implementação. Neste processo é definido um momento global de actualização no qual

Figura 3-8 - Fluxograma do algoritmo



os neurónios procedem sequencialmente ao cálculo de  $(U_i)$ . Em seguida, o estado final de cada neurónio é calculado através da aplicação da função sigmodal. Os neurónios com valores de entrada globalmente negativos (com  $U_i < 0$ ) deverão desactivar-se, aproximando-se do valor  $(U_i=0)$ , inversamente, os com valores de entrada positivos (com  $U_i > 0$ ) deverão activar-se, tendendo para  $(U_i=1)$ . A sensibilidade de resposta em relação aos valores de entrada é determinada pela variável  $(Ganho)$ .

No sétimo módulo, é calculado e registado na variável  $(Sol)$  o valor da função de energia associado à solução corrente.

No procedimento seguinte são efectuados ajustamentos aos ponderadores associados às restrições com o objectivo de acelerar a sua verificação. O esquema de ajustamento utilizado aumenta, como já foi descrito, a importância das restrições violadas, reduzindo a importância das que já se encontram satisfeitas. É ainda efectuado um incremento gradual da variável  $(Ganho)$  quando o algoritmo se aproxima do número máximo de iterações. Esta modificação destina-se a provocar uma convergência e diferenciação forçada dos estados dos neurónios entre  $(0,1)$  para valores próximos de 0 ou 1. No final consideraram-se activos os neurónios com nível de activação superior a  $(0.5)$ , os restantes são considerados inactivos.

De seguida, depois de incrementado o contador de iterações são testados os critérios de paragem. A estabilização do valor da solução  $(\Delta U_{sol} = 0)$  e a definição do número máximo de iterações foram os critérios para decidir sobre a realização de outra iteração.

Encontrada uma solução, o seu valor discretizado é comparado com a melhor até ao momento  $(MSol)$ , sendo guardada caso seja menor.

Por último o algoritmo é reiniciado até que decorra o número de pesquisas definidas pela variável  $(NRuns)$ . No final a melhor solução encontrada em termos de função de energia encontra-se registada na variável  $(MSol)$ .

3.4.3. Problema exemplificativo

Para ilustrar o funcionamento da rede neuronal formalizada e do algoritmo descrito anteriormente, vamos resolver o seguinte problema a título exemplificativo.

Embora apresente uma dimensão reduzida, a instância de (E H E ) proposta pretende mostrar a evolução da rede neuronal até a solução final. Comentam-se ainda as dificuldades encontradas na implementação do algoritmo e a qualidade da solução obtida.

3.4.3.1. Caracterização do problema

O problema consiste na elaboração de um conjunto de horários para uma instituição escolar hipotética com as seguintes características:

- 3 dias de aulas, com 3 períodos diários
- 4 áreas de ensino (Matemática, Português, Geografia e Inglês)
- 6 professores
- 4 turmas
- 3 salas (uma de grande capacidade, uma de média capacidade e uma de reduzidas dimensões).

Para a formalização deste problema, os períodos horários foram dispostos de acordo com a seguinte tabela:

Tabela 3-1 - Períodos horários

horas	Dia 1	Dia 2	Dia 3
9:00 - 12:00	1	4	7
13:00 - 16:00	2	5	8
16:00 - 19:00	3	6	9

Dada a existência de 3 salas disponíveis durante todos os períodos, o número máximo de aulas possível é de 27 (3 x 9) sujeitas às características distintas de cada sala.

Os planos curriculares para cada uma das turmas e a distribuição de professores pelas turmas encontram-se apresentados na seguinte tabela a qual permite a definição de 12 disciplinas.

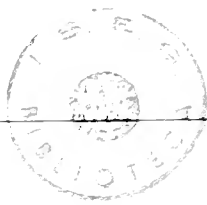


Tabela 3-2 - Plano curricular e disciplinas

áreas		turmas				
nucleares	professores	A	B	C	D	total de aulas atribuídas
Matemática	Professor 1	2 aulas		3 aulas		5 aulas
Matemática	Professor 2		2 aulas		3 aulas	5 aulas
Geografia	Professor 3	2 aulas	2 aulas	1 aula		5 aulas
Português	Professor 4	3 aulas	3 aulas			6 aulas
Português	Professor 5			2 aulas	3 aulas	5 aulas
Opcionais						
Inglês	Professor 6	1 aula				1 aula
total de aulas assistidas		7 aulas	7 aulas	6 aulas	6 aulas	25 aulas

Repare-se que cada combinação professor/turma constitui uma disciplina (num total de 12 disciplinas), sendo indicado no corpo central da Tabela (3-2) o número de aulas semanais exigido para cada disciplina (definido na formulação anterior, por  $N_d$ ).

Em termos curriculares é exigida a realização de um total de 25 aulas. Nesta situação estamos perante um problema de horários quase saturado, onde todos os períodos horários são praticamente preenchidos (índice de ocupação de 93%). Obviamente, a maioria dos problemas reais não assume um carácter tão problemático, gozando de uma maior liberdade para ocupação das salas disponíveis em cada período.

No que respeita à exigência de salas com características particulares para cada uma das disciplinas, essa informação é resumida no quadro onde figura a transposta da matriz  $[C'_{sd}]$  referenciada a propósito da restrição (1.9):

Tabela 3-3 - Plano de salas

Disciplinas	Turma	salas adequadas		
		1	2	3
Matemática 1	A	0=Sim	Sim	Não
Matemática 1	C	Sim	Sim	Não
Matemática 2	B	Sim	Sim	Não
Matemática 2	D	Sim	Sim	Não
Geografia 3	A	Sim	1=Não	Não
Geografia 3	B	Sim	Não	Não
Geografia 3	C	Sim	Não	Não
Português 4	A	Sim	Não	Sim
Português 4	B	Sim	Não	Sim
Português 5	C	Sim	Não	Sim
Português 5	D	Sim	Não	Sim
Inglês 6	A+B	Sim	Não	Sim

Repare-se que esta matriz tem um índice de combinações sala/disciplina incompatíveis de (42%)

Para o efeito de compatibilização dos horários de professores envolvidos nas diversas disciplinas e em simultâneo possibilitar a inclusão de disciplinas nucleares e de opção (como acontece com a disciplina de Inglês) é elaborada a matriz de incompatibilidades $[I_{dd}]$  mencionada na restrição (1.7).

Nesta matriz de dimensão 12 12 disciplinas (Tabela 3-4). não são distinguidos os diferentes tipos de conflitos: os originados por disciplinas pertencentes ao mesmo professor e os provocados por disciplinas que envolvem alunos comuns. De facto, ambos os conflitos correspondem a elementos unitários na matriz  $[I_{dd}]$

Tabela 3-4 - Matriz de incompatibilidades entre disciplinas

disciplinas	Mat1A	Mat1C	Mat2B	Mat2D	Geo3A	Geo3B	Geo3C	Por4A	Por4B	Por5C	Por5D	Ing6AB
Mat1A	-----											
Mat1C		-----										
Mat2B			-----									
Mat2D				-----								
Geo3A					-----							
Geo3B						-----						
Geo3C							-----					
Por4A								-----				
Por4B									-----			
Por5C										-----		
Por5D											-----	
Ing6AB												-----

legenda:

=1

conflito de turnos

=1

conflito de professores

=0

livre

Como exemplo, repare-se nos dois conflitos assinalados (\* e \*\*). O primeiro resulta de uma incompatibilidade referente ao Professor 2, dado que, sendo as disciplinas Mat2D e Mat2B por este leccionadas, não podem decorrer simultaneamente.

O segundo conflito surge da impossibilidade das disciplinas Ing6AB e Geo3A decorrerem simultaneamente, pelo razão da Turma A se encontrar envolvida em ambas as disciplinas.

Na formalização apresentada é ainda considerada a possibilidade de definir um numero máximo de aulas diárias por disciplina ( $M_d$ ). Assim, para o exemplo proposto, os limites definidos para cada disciplina são apresentados na seguinte tabela.

Tabela 3-5 - Limite máximo diário de aulas por disciplina

disciplinas	número máximo de aulas diárias
Matemática 1-A	1
Matemática 1-C	2
Matemática 2-B	1
Matemática 2-D	2
Geografia 3-A	1
Geografia 3-B	1
Geografia 3-C	1
Português 4-A	2
Português 4-B	2
Português 5-C	1
Português 5-D	3
Inglês 6-A+B	1

Dada o reduzido número de períodos envolvidos (3 por dia), não foram implementadas as restrições que asseguram a afectação de um periodo para o almoço diariamente, tanto para professores como para alunos, existindo um periodo fixo de uma hora entre as 12:00 e as 13:00 para esse fim (ver Tabela 3-1).

Quanto à verificação da disponibilidade dos professores ao longo dos periodos definidos, considerou-se a seguinte disposição individual de preferências:

Tabelas 3-6 a 3-11 - Tabelas de disponibilidade dos professores

Professor 1

horas	Dia 1	Dia 2	Dia 3
9:00 - 12:00	Indisponível	Disponível	Disponível
13:00 - 16:00	Indisponível	Disponível	Disponível
16:00 - 19:00	Indisponível	Disponível	Disponível

Professor 2

horas	Dia 1	Dia 2	Dia 3
9:00 - 12:00	Disponível	Disponível	Indisponível
13:00 - 16:00	Disponível	Disponível	Indisponível
16:00 - 19:00	Disponível	Disponível	Indisponível



Professor 3

horas	Dia 1	Dia 2	Dia 3
9:00 - 12:00	Indisponível	Disponível	Disponível
13:00 - 16:00	Indisponível	Disponível	Disponível
16:00 - 19:00	Indisponível	Disponível	Disponível

Professor 4

horas	Dia 1	Dia 2	Dia 3
9:00 - 12:00	Disponível	Indisponível	Disponível
13:00 - 16:00	Disponível	Indisponível	Disponível
16:00 - 19:00	Disponível	Indisponível	Disponível

Professor 5

horas	Dia 1	Dia 2	Dia 3
9:00 - 12:00	Disponível	Disponível	Indisponível
13:00 - 16:00	Disponível	Disponível	Indisponível
16:00 - 19:00	Disponível	Disponível	Indisponível

Professor 6

horas	Dia 1	Dia 2	Dia 3
9:00 - 12:00	Indisponível	Disponível	Disponível
13:00 - 16:00	Indisponível	Disponível	Disponível
16:00 - 19:00	Indisponível	Disponível	Disponível

Finalmente, antes de procedermos à resolução do demonstrativo e necessario definir a matriz  $[B_{it}]$  responsavel pela selecção dos horarios de melhor qualidade quanto a dispersão. Tal como já foi referido na secção (1.3), esta matriz atribui uma penalização a ocorrência de aulas no periodos  $t$  e  $t'$  (quanto mais temporalmente afastadas se encontrarem as aulas, maior será a penalização atribuida).

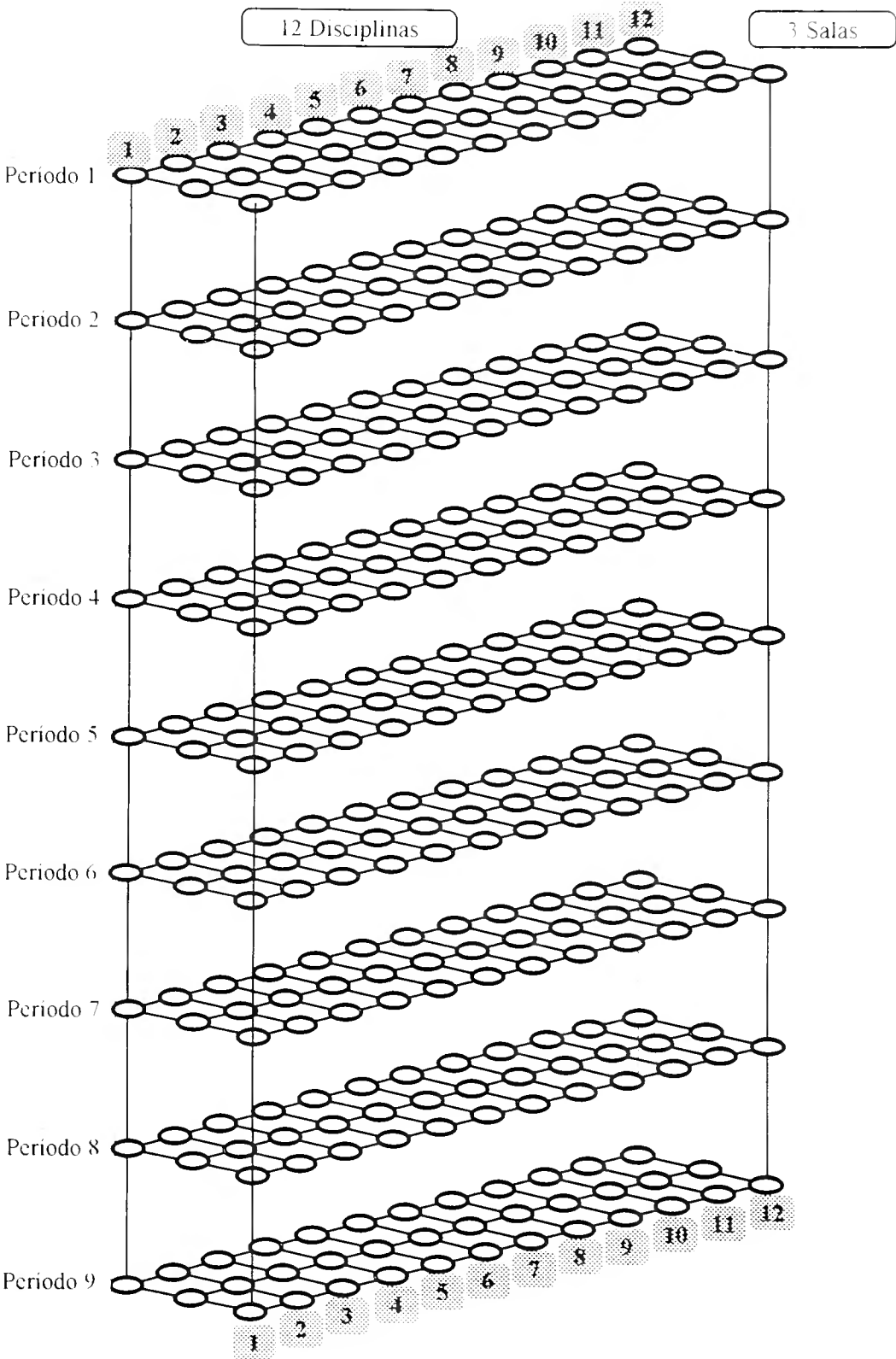
A matriz de penalizações utilizada neste exemplo foi a seguinte:

Tabela 3-12 - Matriz de penalizações entre períodos

periodos	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	0	0	1	2	2	2	3	3	3
2	0	0	0	2	2	2	3	3	3
3	1	0	0	2	2	2	3	3	3
4	2	2	2	0	0	1	2	2	2
5	2	2	2	0	0	0	2	2	2
6	2	2	2	1	0	0	2	2	2
7	3	3	3	2	2	2	0	0	1
8	3	3	3	2	2	2	0	0	0
9	3	3	3	2	2	2	1	0	0

Definido o conjunto de dados iniciais, a resolução do problema passa pela caracterização da estrutura neuronal ilustrada na figura que se segue (Figura 3-9). A rede para este caso terá 324 neurónios ( 3 salas x 12 disciplinas x 9 períodos )

Figura 3-9 - Representação neuronal do problema



### 3.4.3.2. Resolução computacional

Na resolução computacional foram testadas diversas combinações de parâmetros por forma a direccionar o algoritmo na pesquisa e convergência para soluções consideradas satisfatórias, ou seja, que satisfaçam as restrições do 1º e 2ºGrupo (Eq. 1.5 a 1.13) mesmo que não atendam às preferências estipuladas pelo 3ºGrupo, correspondente a função objectivo.

Na prática a definição inicial destes valores revelou-se problemática, dada a dificuldade em equilibrar os ponderadores referentes as restrições e os associados a função objectivo. Mesmo dentro do conjunto de restrições, foi difícil a escolha de ponderadores ajustados às diferentes prioridades de cada grupo de restrições (as obrigatórias - 1ºGrupo e as de compatibilidade - 2ºGrupo). Constatou-se ainda que sem o teste de um conjunto adequado de parâmetros o algoritmo tende a sobrevalorizar o aspecto ligado ao ponderador mais elevado, desprezando praticamente todos os outros aspectos ponderados com valores inferiores.

Um equilíbrio aceitável destes parâmetros foi conseguido atribuindo uma ponderação significativamente reduzida as componentes da função objectivo (3ºGrupo de restrições de carácter orientador), enquanto que as restrições do 1º e 2ºGrupo foram atribuídos ponderações elevadas dado o seu carácter obrigatório. De salientar que estes ponderadores são posteriormente modificados no decurso do algoritmo de acordo com o esquema de actualização já referido, com vista à satisfação integral das restrições.

Quanto à variável (*Ganho*), foi testado inicialmente com relativo sucesso, o valor proposto por Wilson e Pawley referentes ao problema do TSP, verificando-se após poucas tentativas que o algoritmo regista um desempenho superior com o valor inicial de 50.

Neste contexto, o algoritmo procedeu à determinação duma solução efectuando 100 pesquisas, partindo de soluções iniciais aleatorias distintas.

O tempo total gasto neste processo foi aproximadamente de 23 minutos. Este tempo, por se tratar de um algoritmo neuronal simulado, não pode ser tomado como medida de eficiência comparativamente a outras abordagens.

A melhor solução obtida surgiu no decurso da pesquisa nº56, tendo sido necessárias 80 iterações para convergir para a dita solução final. A evolução ao longo das

80 iterações é graficamente resumida nas Figuras 3-10 a 3-14 as quais representam o estado da rede neuronal no final das iterações 1,20,40,60 e 80 (solução final)

Em todas as figuras são identificados com um quadrado os neurónios activos na solução final, tornando possível acompanhar as modificações nos estados dos neurónios até a estabilização na solução final.

A solução final satisfaz todo o conjunto de restrições consideradas, o que implica a anulação de todas as parcelas da função energia correspondentes a estas restrições

O valor da função de energia encontrado foi 412, decompondo-se numa penalização de 242 referente à penalidade total relativa aos horários dos alunos, mais uma penalização de 150 associada à aos horários dos professores e ainda uma penalização de 20 pela violação das disponibilidades manifestadas pelos professores

Os resultados computacionais obtidos podem ser considerados bastante satisfatórios atendendo ao elevado índice de ocupação do problema (93%). Este facto, aliado a uma matriz de incompatibilidades entre disciplinas bastante densa (com 37% de conflitos, originada pela existência de disciplinas leccionadas pelos mesmos professores e por disciplinas de opção), tornava o problema pouco flexível e de resolução problemática

Adicionalmente, a existência por parte dos professores de uma indisponibilidade na ordem dos 33%, e o facto de algumas disciplinas necessitarem de salas específicas, condiciona ainda mais esta situação, dificultando a pesquisa de uma solução global que ultrapasse todas estas limitações.

Analisando a solução final traduzida nos horários das Tabelas 3-13 a 3-22, verificamos que em termos de concentração das aulas para cada uma das turmas e cada um dos professores, foi atingido um resultado global muito satisfatório. Verificou-se apenas a existência de dois furos, no horário da Turma A e do Professor 1.

Quanto às disponibilidades evidenciadas previamente pelos professores, os resultados foram igualmente satisfatórios, obedecendo à maioria dessas preferências (96% foram satisfeitas). Existiram apenas duas situações em que tal não se verificou (ver horários dos Professores 3 e 5).

Figura 3-10 - Representação da rede na Iteração 1

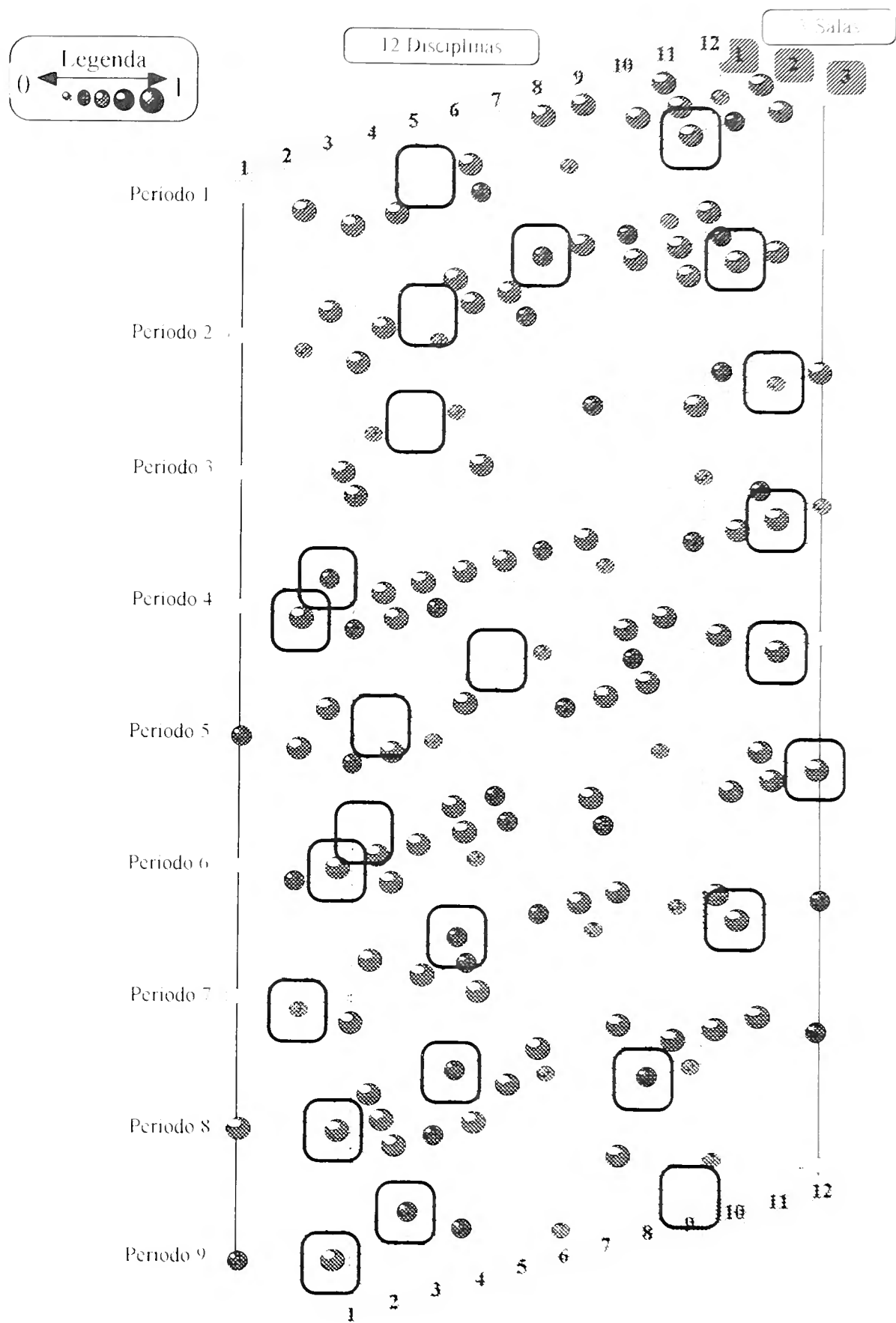


Figura 3-11 - Representação da rede na Iteração 20

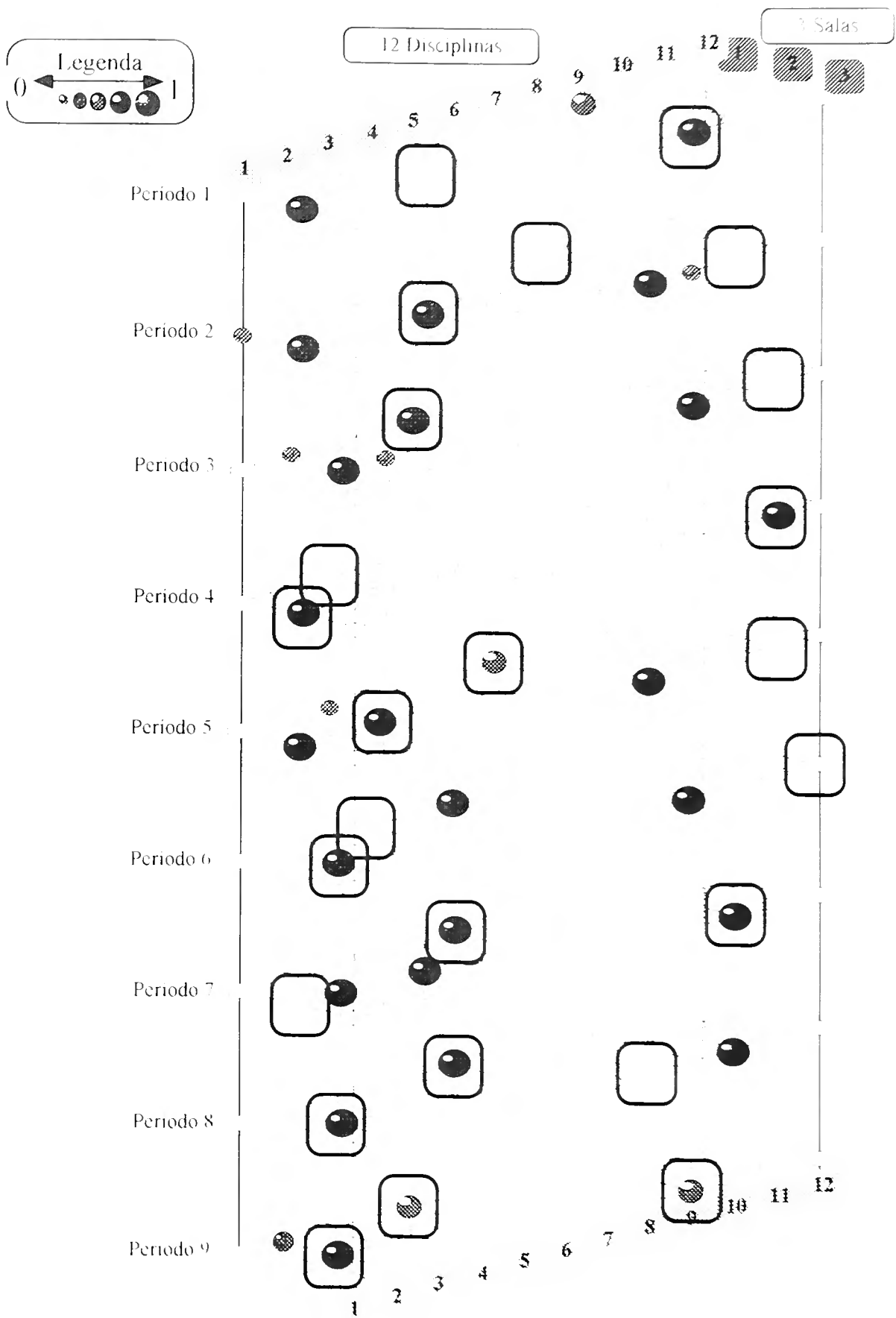


Figura 3-12 - Representação da rede na Iteração 40

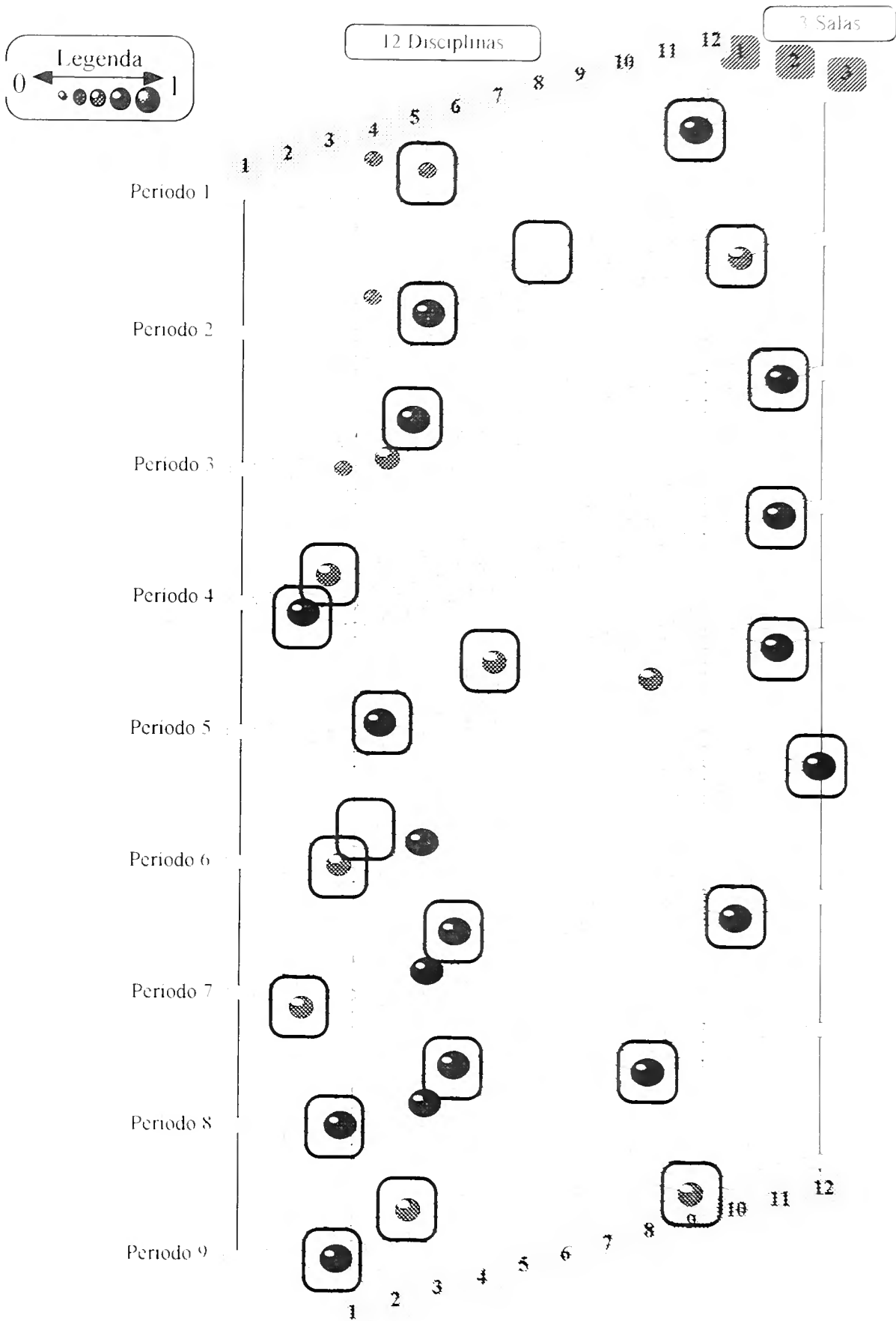


Figura 3-13 - Representação da rede na Iteração 60

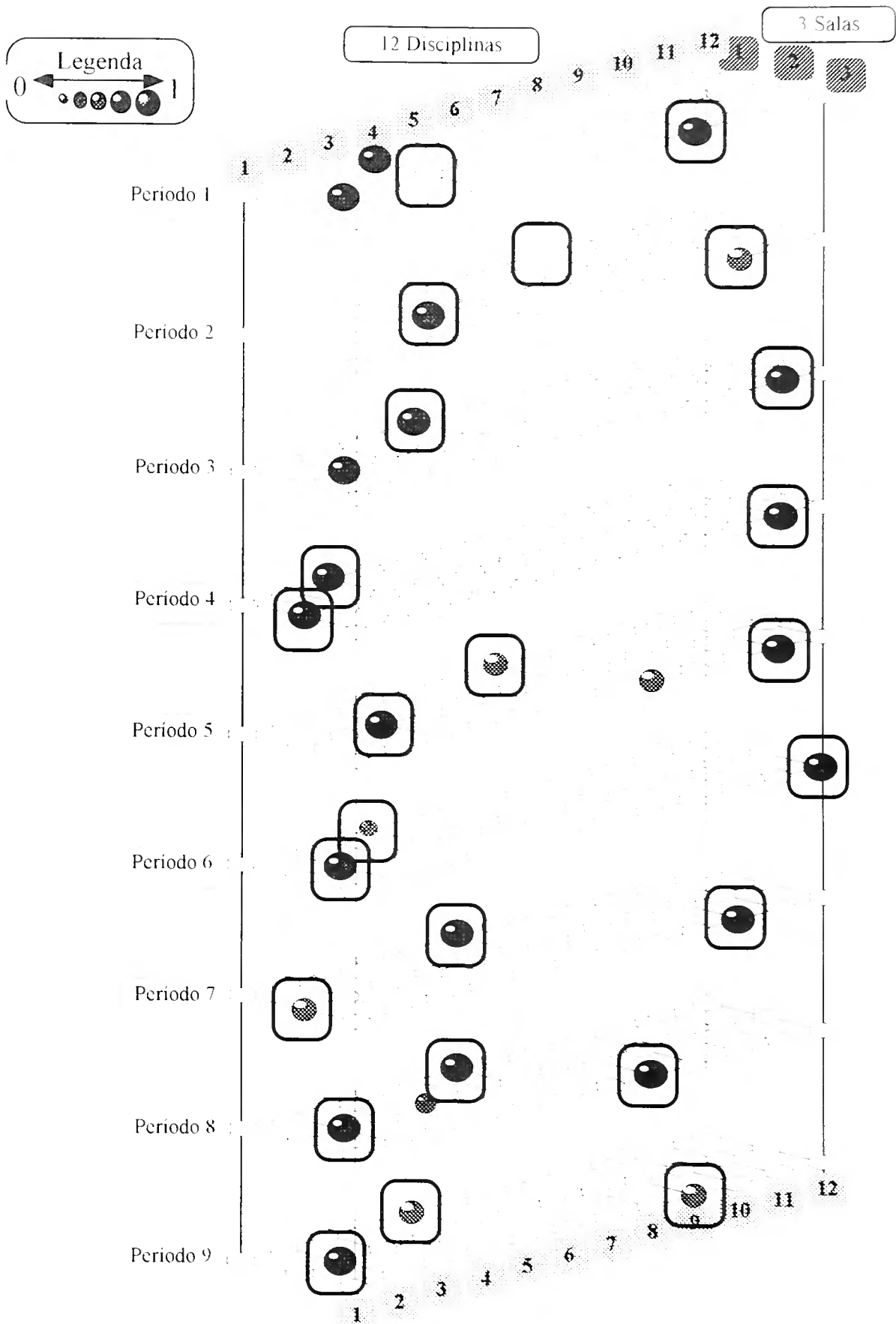
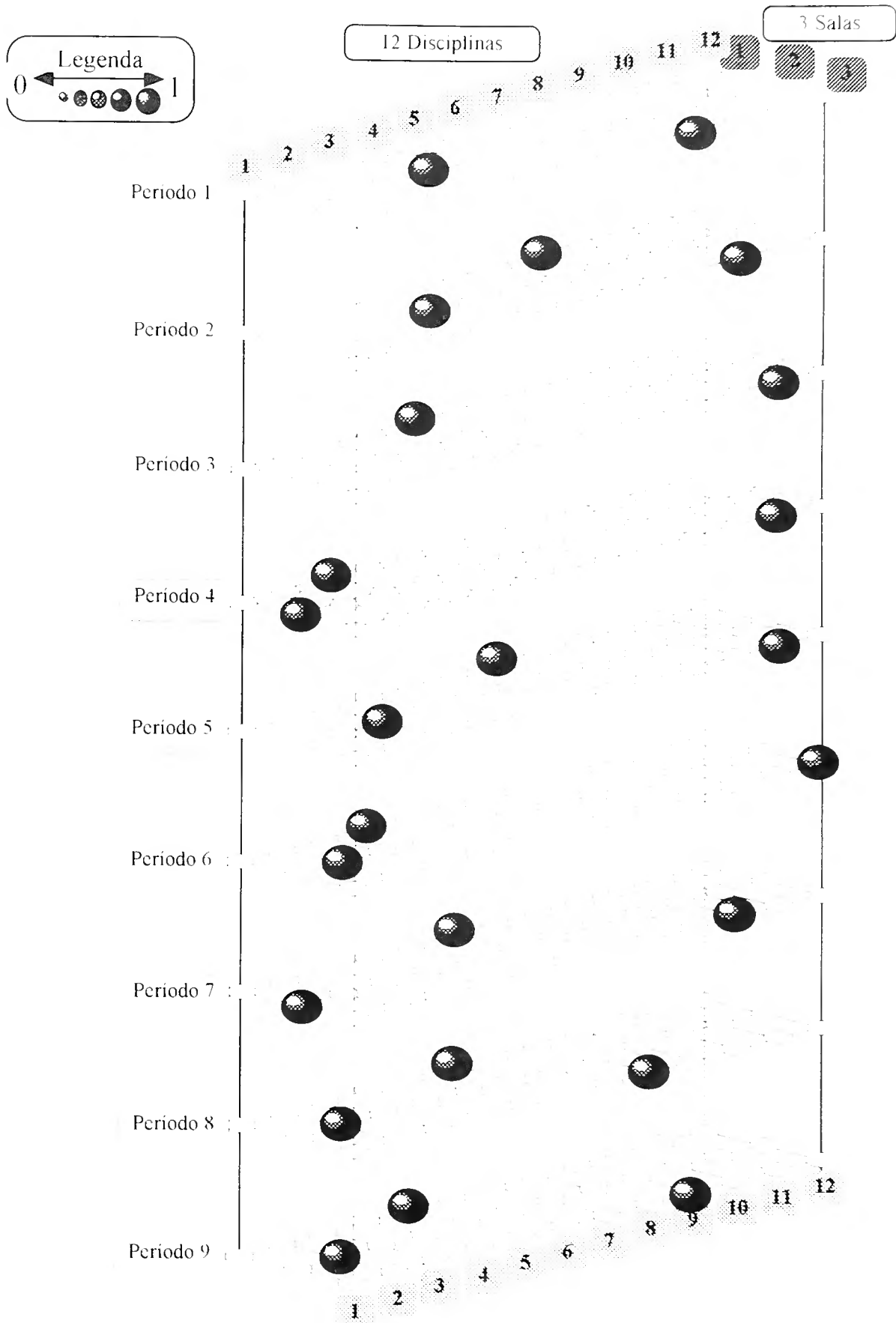




Figura 3-14 - Representação da rede na Iteração 80 - Solução Final



Horários elaborados  
Tabela 3-13 - Turma A

horas	Dia 1	Sala	Dia 2	Sala	Dia 3	Sala
9:00 - 12:00			Matematica	2	Matematica	2
13:00 - 16:00	Português	1			Português	3
16:00 - 19:00	Geografia	1	Inglês	3	Geografia	1

Tabela 3-14 - Turma B

horas	Dia 1	Sala	Dia 2	Sala	Dia 3	Sala
9:00 - 12:00	Português	3	Matemática	1	Geografia	1
13:00 - 16:00			Matemática	2	Geografia	1
16:00 - 19:00			Inglês	3	Português	3

Tabela 3-15 - Turma C

horas	Dia 1	Sala	Dia 2	Sala	Dia 3	Sala
9:00 - 12:00					Português	3
13:00 - 16:00	Português	3	Geografia	1	Matematica	2
16:00 - 19:00			Matematica	2	Matematica	2

Tabela 3-16 - Turma D

horas	Dia 1	Sala	Dia 2	Sala	Dia 3	Sala
9:00 - 12:00	Matematica	2	Português	3		
13:00 - 16:00	Matematica	2	Português	3		
16:00 - 19:00	Português	3	Matematica	1		

Tabela 3-17 - Professor 1

horas	Dia 1	Sala	Dia 2	Sala	Dia 3	Sala
9:00 - 12:00			Matemat -A	2	Matemat. -A	2
13:00 - 16:00					Matemat. -C	2
16:00 - 19:00			Matemat -C	2	Matemat. -C	2

Tabela 3-18 - Professor 2

horas	Dia 1	Sala	Dia 2	Sala	Dia 3	Sala
9:00 - 12:00	Matemat. -D	2	Matemat. -B	1		
13:00 - 16:00	Matemat. -D	2	Matemat. -B	2		
16:00 - 19:00			Matemat. -C	1		

Tabela 3-19 - Professor 3

horas	Dia 1	Sala	Dia 2	Sala	Dia 3	Sala
9:00 - 12:00					Geografia -B	1
13:00 - 16:00			Geografia - C	1	Geografia -B	1
16:00 - 19:00	Geografia - A	1			Geografia -A	1



Tabela 3-20 - Professor 4

horas	Dia 1	Sala	Dia 2	Sala	Dia 3	Sala
9:00 - 12:00	Português -B	3				
13:00 - 16:00	Português -A	1			Português A	3
16:00 - 19:00					Português B	3

Tabela 3-21 - Professor 5

horas	Dia 1	Sala	Dia 2	Sala	Dia 3	Sala
9:00 - 12:00			Português -D	3	Português C	3
13:00 - 16:00	Português -C	3	Português -D	3		
16:00 - 19:00	Português -D	3				

Tabela 3-22 - Professor 6

horas	Dia 1	Sala	Dia 2	Sala	Dia 3	Sala
9:00 - 12:00						
13:00 - 16:00						
16:00 - 19:00			Inglês A+B	3		

4. *Aplicação do algoritmo a cenários pseudo-reais*

4.1. *Descrição dos cenários*

Para estudar o comportamento do algoritmo proposto, face a problemas de horários com exigências e dimensões diferentes, procedeu-se a sua aplicação a um conjunto de problemas de (E.H.E.) pseudo-reais de diferentes níveis de dificuldade

A elaboração dos cenários pseudo-reais, foi efectuada partindo uma situação comum

- 13 professores, divididos pelas áreas de ensino de Matematica, Geografia, Português, Economia, Desenho, Inglês, Francês e Alemão;
- 9 turmas, identificadas de A a I, respectivamente, todas com igual dimensão, a excepção da turma A que tem uma dimensão superior, requerendo uma sala de maior capacidade;
- a semana escolar é composta por 30 periodos com duração de uma hora e meia distribuídos ao longo da semana tal como a Tabela 4-1 ilustra (os periodos destinados ao almoço decorrem das 11:00 às 14:00 horas).

Tabela 4-1 - Períodos semanais

horas	Seg.	Ter.	Qua.	Qui.	Sex.
8:00 - 9:30	1	7	13	19	25
9:30 - 11:00	2	8	14	20	26
11:00 - 12:30	3	9	15	21	27
12:30 - 14:00	4	10	16	22	28
14:00 - 15:30	5	11	17	23	29
15:30 - 17:00	6	12	18	24	30

- os professores consideram-se disponiveis em todos os periodos semanais, não se atendendo a preferências individuais;
- a matriz utilizada para expressar a penalização subjectiva associada a realização de aulas em dois periodos horários foi a seguinte:

Tabela 4-2 - Matriz de penalizações entre períodos

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
1		0	1	2	3	4	6	6	6	6	6	6	7	7	7	7	7	7	8	8	8	8	8	8	9	9	9	9	9	9
2	0		0	1	2	3	6	6	6	6	6	6	7	7	7	7	7	7	8	8	8	8	8	8	9	9	9	9	9	9
3	1	0		0	1	2	6	6	6	6	6	6	7	7	7	7	7	7	8	8	8	8	8	8	9	9	9	9	9	9
4	2	1	0		0	1	6	6	6	6	6	6	7	7	7	7	7	7	8	8	8	8	8	8	9	9	9	9	9	9
5	3	2	1	0		0	6	6	6	6	6	6	7	7	7	7	7	7	8	8	8	8	8	8	9	9	9	9	9	9
6	4	3	2	1	0		6	6	6	6	6	6	7	7	7	7	7	7	8	8	8	8	8	8	9	9	9	9	9	9
7	6	6	6	6	6	6		0	1	2	3	4	6	6	6	6	6	6	7	7	7	7	7	7	8	8	8	8	8	8
8	6	6	6	6	6	6	0		0	1	2	3	6	6	6	6	6	6	7	7	7	7	7	7	8	8	8	8	8	8
9	6	6	6	6	6	6	1	0		0	1	2	6	6	6	6	6	6	7	7	7	7	7	7	8	8	8	8	8	8
10	6	6	6	6	6	6	2	1	0		0	1	6	6	6	6	6	6	7	7	7	7	7	7	8	8	8	8	8	8
11	6	6	6	6	6	6	3	2	1	0		0	6	6	6	6	6	6	7	7	7	7	7	7	8	8	8	8	8	8
12	6	6	6	6	6	6	4	3	2	1	0		6	6	6	6	6	6	7	7	7	7	7	7	8	8	8	8	8	8
13	7	7	7	7	7	7	6	6	6	6	6	6		0	1	2	3	4	6	6	6	6	6	6	7	7	7	7	7	7
14	7	7	7	7	7	7	6	6	6	6	6	6	0		0	1	2	3	6	6	6	6	6	6	7	7	7	7	7	7
15	7	7	7	7	7	7	6	6	6	6	6	6	1	0		0	1	2	6	6	6	6	6	6	7	7	7	7	7	7
16	7	7	7	7	7	7	6	6	6	6	6	6	2	1	0		0	1	6	6	6	6	6	6	7	7	7	7	7	7
17	7	7	7	7	7	7	6	6	6	6	6	6	3	2	1	0		0	6	6	6	6	6	6	7	7	7	7	7	7
18	7	7	7	7	7	7	6	6	6	6	6	6	4	3	2	1	0		6	6	6	6	6	6	7	7	7	7	7	7
19	8	8	8	8	8	8	7	7	7	7	7	7	6	6	6	6	6	6		0	1	2	3	4	6	6	6	6	6	6
20	8	8	8	8	8	8	7	7	7	7	7	7	6	6	6	6	6	6	0		0	1	2	3	6	6	6	6	6	6
21	8	8	8	8	8	8	7	7	7	7	7	7	6	6	6	6	6	6	1	0		0	1	2	6	6	6	6	6	6
22	8	8	8	8	8	8	7	7	7	7	7	7	6	6	6	6	6	6	2	1	0		0	1	6	6	6	6	6	6
23	8	8	8	8	8	8	7	7	7	7	7	7	6	6	6	6	6	6	3	2	1	0		0	6	6	6	6	6	6
24	8	8	8	8	8	8	7	7	7	7	7	7	6	6	6	6	6	6	4	3	2	1	0		6	6	6	6	6	6
25	9	9	9	9	9	9	8	8	8	8	8	8	7	7	7	7	7	7	6	6	6	6	6	6		0	1	2	3	4
26	9	9	9	9	9	9	8	8	8	8	8	8	7	7	7	7	7	7	6	6	6	6	6	6	0		0	1	2	3
27	9	9	9	9	9	9	8	8	8	8	8	8	7	7	7	7	7	7	6	6	6	6	6	6	1	0		0	1	2
28	9	9	9	9	9	9	8	8	8	8	8	8	7	7	7	7	7	7	6	6	6	6	6	6	2	1	0		0	1
29	9	9	9	9	9	9	8	8	8	8	8	8	7	7	7	7	7	7	6	6	6	6	6	6	3	2	1	0		0
30	9	9	9	9	9	9	8	8	8	8	8	8	7	7	7	7	7	7	6	6	6	6	6	6	4	3	2	1	0	

Neste contexto, foi estabelecido um plano curricular comum a todos os cenários, no qual se define o número semanal de aulas para cada área de ensino, bem como, a turma e o docente envolvido (Tabela 4-3).

As turmas têm cerca de 17 aulas semanais, distribuídas por áreas de ensino nucleares (Matemática, Geografia, Português, Economia e Desenho) e opcionais (Inglês, Francês e Alemão). No total encontram-se programadas 120 aulas durante o período semanal.

Tabela 4-3 - Plano curricular

		turma									Tot
áreas	Pr.	A	B	C	D	E	F	G	H	I	
Mat	1	5			5				5		15
Mat	2		5				5				10
Geo	3	4		5							9
Geo	4					5				4	9
Por.	5				4			6			10
Por.	6		4						6		10
Eco.	7			6			6			6	18
Eco.	8					6		6			12
Des.	9	4								4	8
Des.	10		4		4						8
opcionais											
Ing.	11	4	4	4							4
Fra.	12				4	4	4				4
Ale.	13							4	4	4	4
total aulas		17	17	15	17	15	15	16	15	18	120

Refira-se o facto de algumas requererem salas especiais, como e o caso de Desenho e das opções (Inglês, Francês e Alemão) que pelo elevado numero de alunos reunidos necessitam de salas de grande capacidade

Definiu-se adicionalmente, por motivos pedagogicos, que nenhuma area de ensino para a mesma turma devera exceder o limite maximo de duas aulas diarias

A afectação professor/turma (disciplina) origina a seguinte matriz de incompatibilidades, composta por conflitos entre turmas e conflitos entre professores

Refira-se que esta matriz apresenta um indice de incompatibilidade de 17%

Tabela 4-4 - Matriz de incompatibilidades

disciplinas	M1 A	M1 D	M1 H	M2 B	M2 F	G3 A	G3 C	G4 E	G4 I	P5 D	P5 G	P6B	P6 H	E7 C	E7 F	E7 I	E8I	E8 G	D9 A	D9 I	D10 B	D10 D	B11 A	B11 C	B11 D	B11 E	B11 F	B11 G	B11 H	B12 A	B12 C	B12 D	B12 E	B12 F	B12 G	B12 H	A13 G	A13 H	A13 I				
Mat1A		1	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1																				
Mat1D	1		1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0																			
Mat1H	1	1		0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0		
Mat2B	0	0	0		1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1																			
Mat2F	0	0	0	1		0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
Geo3A	1	0	0	0	0		1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
Geo3C	0	0	0	0	0	1		0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
Geo4E	0	0	0	0	0	0	0		1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
Geo4I	0	0	0	0	0	0	0	1		0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
Por5D	0	0	0	0	0	0	0	0	0		1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Por5G	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1		0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Por6B	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0		1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Por6H	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Eco7C	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0		1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Eco7F	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1		1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Eco7I	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	1		0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Eco8E	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0		1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Eco8G	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Des9A	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0		1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Des9I	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Des10B	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Des10D	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Ing11ABC	1	0	0	1	0	1	1	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Fra12DEF	0	1	0	0	1	0	0	1	0	1	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Ale13GHI	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	1	0	1	0	0	1	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

legenda:  conflito de professores  conflito de turmas

Definidas as características comuns aos diferentes cenários do problema de (E.H.E.), é agora apresentado o aspecto pelo qual estes diferem - o número disponível de salas. Optou-se por fazer a diferenciação através deste parâmetro, dado que este condiciona profundamente a dificuldade do problema resultante. Para o efeito consideraram-se quatro cenários distintos.

1º Cenário - 7 salas disponíveis

Neste cenário, existem disponíveis 7 salas de aula, distribuídas pelos seguintes tipos: quatro salas de elevada capacidade (Salas 7, 6, 5 e 4), 2 salas de dimensões reduzidas (Salas 3 e 2) e uma sala de desenho (Sala 1). De acordo com os períodos

semanais definidos, o número potencial de aulas realizáveis é de 210 aulas (7 salas x 30 periodos = 210), traduzindo-se num índice de ocupação de cerca de 57% ( $\frac{120 \text{ aulas programadas}}{210 \text{ aulas possíveis}} = 571\%$  ) Este valor indicativo, não considera ainda as limitações adicionais decorrentes do facto das disciplinas necessitarem de salas adequadas, tal como se mostra na seguinte tabela:

Tabela 4-5 - Plano de salas

	Salas						
	7	6	5	4	3	2	1
Mat1A	0=sim	sim	sim	sim	1=não	não	não
Mat1D	sim	sim	sim	sim	sim	sim	não
Mat1H	sim	sim	sim	sim	sim	sim	não
Mat2B	sim	sim	sim	sim	sim	não	não
Mat2F	sim	sim	sim	sim	sim	sim	não
Geo3A	sim	sim	sim	sim	não	não	não
Geo3C	sim	sim	sim	sim	sim	sim	não
Geo4E	sim	sim	sim	sim	sim	sim	não
Geo4I	sim	sim	sim	sim	sim	sim	não
Por5D	sim	sim	sim	sim	sim	sim	não
Por5G	sim	sim	sim	sim	sim	sim	não
Por6B	sim	sim	sim	sim	sim	não	não
Por6H	sim	sim	sim	sim	sim	sim	não
Eco7C	sim	sim	sim	sim	sim	sim	não
Eco7F	sim	sim	sim	sim	sim	sim	não
Eco7I	sim	sim	sim	sim	sim	sim	não
Eco8E	sim	sim	sim	sim	sim	sim	não
Eco8G	sim	sim	sim	sim	sim	sim	não
Des9A	sim	sim	sim	sim	não	não	sim
Des9I	sim	sim	sim	sim	não	não	sim
Des10B	sim	sim	sim	sim	não	não	sim
Des10D	sim	sim	sim	sim	não	não	sim
Ing11ABC	sim	sim	sim	sim	não	não	não
Fra12DEF	sim	sim	sim	sim	não	não	não
Ale13GHI	sim	sim	sim	sim	não	não	não

A índice de combinações incompatíveis sala/disciplina apresentada nesta tabela é de 23%.

2ª Cenário - 6 salas disponíveis

Neste cenário, encontram-se disponíveis 6 salas de aula, tendo sido eliminada uma sala de grande capacidade (Sala 7). A dificuldade do problema de (E.H.E.) e acrescida dada a diminuição do número potencial de aulas realizaveis (6 salas x 30 periodos = 180



aulas) O índice de ocupação associado a esta instância do problema aumenta para 66,7%.

O plano das salas é idêntico ao anterior (Tabela 4-5), removida a Sala 7, provocando um aumento do índice de combinações incompatíveis sala/disciplina para 29%.

### 3º Cenário - 5 salas disponíveis

Dispondo nesta situação de um máximo de 5 salas, através da eliminação de mais uma sala de grande capacidade (Sala 6), a dificuldade do problema de (E H E) volta a aumentar, facto comprovável através do índice de ocupação que atinge os 80%.

O plano das salas volta a ser idêntico ao mostrado na Tabela 4-5, retiradas as Salas 7 e 6. O índice de combinações incompatíveis sala/disciplina sobe para 34%.

### 4º Cenário - 4 salas disponíveis

Neste cenário, no qual existem disponíveis apenas 4 salas de aulas (uma única de elevada capacidade), o índice de ocupação atinge os 100%, correspondendo a um problema completamente saturado. Nesta situação todas as salas deverão ser permanentemente ocupadas.

O plano de salas continua idêntico ao mostrado na Tabela 4-5, para as Salas 1, 2, 3 e 4. O índice de combinações compatíveis sala/disciplina atinge os 43% diminuindo ainda mais a flexibilidade do problema de horários. Por estas razões esta instância do problema de (E H E) é a mais problemática, podendo não existir uma solução que verifique simultaneamente todo o conjunto de restrições definido.

## ***4.2. Resolução computacional e análise dos resultados***

Na resolução computacional foram utilizadas redes neurais com 5250, 4500, 3750 e 3000 neurónios, respectivamente para o 1º, 2º, 3º e 4º cenários considerados.

Em termos gerais o processo de implementação computacional efectuou-se num contexto idêntico ao proposto para o problema exemplificativo.

A definição dos diversos parâmetros utilizados pelo algoritmo foi problemática obrigando a um processo demorado de experimentação e teste do algoritmo com diversos conjuntos de parâmetros. Foi possível constatar que o algoritmo necessita de sofrer constantes ajustamentos para acompanhar as eventuais modificações de dimensão do problema de (E.H.E.). Como resultado dos ensaios efectuados, optou-se pelas definições de parâmetros e variáveis que de seguida apresentamos.

Variável (Cianho) 25

Estabeleceu-se um nível de ganho mais baixo comparativamente ao definido no problema exemplificativo, para tornar o algoritmo mais "sensível" na pesquisa de soluções. Esta modificação traduz-se também num aumento do tempo computacional exigido, dado que os neurónios demoram mais tempo a definir o seu estado final.

Parâmetros ( $\Delta\tau = 0.0001$  e  $k = 1$ ).

A semelhança do problema exemplificativo, tornou-se a utilizar estes valores que permitiram alcançar uma satisfatória actualização dos estados dos neurónios.

Ponderadores ( $\alpha$  e  $\beta=1$ ), ( $P_{tucA}$ ,  $P_{tucB}$  e  $P_{tucC}=250$ ), ( $P_{tuc1}$ ,  $P_{tuc2}$ ,  $P_{tuc3}$ ,  $P_{tuc4}$ , e  $P_{tuc5}=190$ ) e ( $P_{var}=5000$ )

Este conjunto de ponderadores mostrou-se satisfatoriamente adaptado aos cenários estudados no entanto na resolução do 4º cenário, foi necessário efectuar ligeiras modificações pontuais nestes parâmetros para a adaptação a aspectos particulares.

Nestas condições, definiu-se ( $NRuns=20$ ) e ( $MaxIter=500$ ), procedendo-se a execução do algoritmo para cada um dos cenários. O esquema de actualização utilizado foi novamente o modelo síncrono e sequencial, por motivos de maior velocidade de execução. Foram igualmente experimentados os restantes modelos alternativos, não evidenciando melhorias significativas na qualidade das soluções obtidas.

O tempo computacional gasto foi em média de 9 horas para encontrar a solução relativa a cada cenário.

Após a execução do algoritmo para os diferentes cenários obtiveram-se os resultados que se encontram apresentados na seguinte tabela.

Tabela 4-6 - Resultados Computacionais

problemas	índice de ocupação	índice de incompat. de salas	restrições								penalização dos professores	penalização do aluno	furos do Prof.	furos do aluno
			1.5	1.6	1.7	1.8	1.9	1.10	1.11	1.12				
1º cenário	57%	23%	0	0	0	0	0	0	0	0	3534	7412	28	30
2º cenário	67%	29%	0	0	0	0	0	0	2	0	3365	6954	31	35
3º cenário	80%	34%	0	0	0	0	24	0	5	3	3199	6591	27	30
4º cenário	100%	43%	0	0	0	2	35	0	7	4	3639	7336	25	36

A esquerda, nesta tabela apresentam-se dois indicadores caracterizadores da dificuldade de cada cenário, nomeadamente, o índice de ocupação e o índice de incompatibilidades de salas. Em seguida, no centro da tabela, apresentam-se para cada cenário, o número total de violações de cada tipo de restrição. Por fim apresentam-se duas medidas relacionadas com a qualidade dos horarios obtidos em cada cenário: a penalização para os professores e para os alunos relativa a solução encontrada e o numero total de furos existentes em cada grupo de horarios. Note-se que a noção de furo utilizada foi a definida anteriormente na qual os intervalos de almoço são também considerados como furos.

Como se pode verificar, as restrições obrigatórias (1.5), (1.6) e (1.7) foram sempre respeitadas, o que é bastante satisfatório se atendermos, por exemplo, a dificuldade existente na resolução do 4º cenário que corresponde a uma situação de saturação. Neste caso foi possível encontrar uma solução globalmente satisfatória no sentido de que satisfaz as restrições obrigatórias a custa da violação de algumas das restantes restrições, principalmente da restrição da adequação das salas (1.9).

Como seria de esperar nos cenários mais folgados foi possível encontrar soluções não só admissíveis como globalmente satisfatórias, de que é exemplo o 1º cenário.

No que respeita a qualidade da solução expressa em termos do valor da  $f_0$  do modelo de P.N.L. Binária apresentado no capítulo 1 e do numero total de furos existentes na solução, não foi possível estabelecer uma relação evidente entre o nível de dificuldade dos cenários (evidenciado pelos dois índices calculados) e a respectiva qualidade na solução obtida. Repare-se que o valor mais baixo de penalização, tanto para professores como para alunos, foi obtido na resolução do 3º cenário, considerado relativamente difícil se atendermos ao elevado índice de ocupação (80%). Pelo contrario no 1º cenário, no qual

existia uma maior flexibilidade, a solução encontrada regista valores mais elevados tanto na penalização associada aos horários como no numero total de furos existente. Refira-se que o valor de penalização associado a um horário é a medida mais forte da qualidade num horário pois contabiliza não só o número de furos existente como também a sua dimensão relativa.

Estes resultados levam-nos a supor que embora o algoritmo se demonstre eficiente na obtenção de soluções globalmente admissíveis falha, no entanto, na elaboração de horários de elevada qualidade. Duas razões podem estar na origem deste facto: o reduzido espaço de soluções admissíveis eventualmente existente, que pode inviabilizar a pesquisa de soluções alternativas com melhor qualidade, e a forma particular de codificação da função objectivo no algoritmo neuronal - por inclusão na função de energia associada a um ponderador subjectivo - que provoca uma possível diluição da sua importância relativa.



## 5. Conclusão

Em função do processo de implementação computacional da rede neuronal e dos respectivos resultados obtidos, tanto no problema exemplificativo como nos diferentes cenários pseudo-reais do problema de (E.H.E.), foi possível retirar as seguintes conclusões

Ao nível da formalização o algoritmo baseado na rede neuronal de Hopfield permite uma modelização directa das variáveis binárias do problema de (E.H.E.), na qual cada neurónio representa uma dessas variáveis. Existe assim uma transparência formal entre o estado dos neurónios e o valor das respectivas variáveis binárias da formalização em P.N.L. Binária do problema de (E.H.E.), o que facilita a leitura e a observação da evolução do algoritmo até a solução final

Contudo, o processo de elaboração de uma rede neuronal específica para a resolução do (E.H.E.) proposto revelou-se pouco flexível, sendo difícil a posterior introdução de eventuais modificações, que obrigariam a uma total reformulação do modelo. Este aspecto é bastante limitativo do ponto de vista prático se considerarmos a flexibilidade naturalmente exigida para um modelo destinado a futura resolução deste tipo de problemas numa diversidade de casos reais

Ao nível das soluções obtidas foi possível verificar dois aspectos distintos. Em relação às diversas restrições consideradas na elaboração de horários a abordagem neuronal mostrou-se bastante eficiente na sua verificação, permitindo encontrar, em todos os casos estudados, soluções no mínimo satisfatórias em termos do cumprimento das restrições obrigatórias, mesmo nos casos mais problemáticos (como por exemplo no 4º cenário exposto no capítulo 4)

O modelo neuronal comparativamente a sua versão em termos de P.N.L. Binária, revelou-se mais adaptativo quanto às restrições, dado que estas podem ser separadas formalmente por níveis de importância, ao contrário do modelo P.N.L. Binário no qual todas as restrições têm igual nível de importância. Esta capacidade permite em casos problemáticos a sua eventual violação por ordem crescente de importância

Adicionalmente, o processo incorporado de ponderadores variáveis reforçou esta adaptabilidade do modelo original de Hopfield, contribuindo para o bom desempenho verificado ao nível da satisfação das restrições.

Porém, no que respeita a qualidade da solução obtida, ou seja, ao cumprimento das orientações expressas pela função objectivo do modelo de P.N.L. Binária, o modelo neuronal demonstrou algumas deficiências. Tal facto deve-se a forma como é incluída a função objectivo e todo o conjunto de restrições na função energia do modelo neuronal, a qual torna difícil o equilíbrio de importância entre as restrições consideradas melhorativas (expressas na função objectivo do P.N.L. Binário) e as restrições consideradas obrigatórias ou de compatibilidade (expressas nas restrições do mesmo modelo). Na prática o algoritmo tem tendência a sobrevalorizar um destes grupos de restrições.

Neste contexto, verificamos que o modelo neuronal é adequado para problema nos quais, tal como no (E.H.E.), a função objectivo não é muito rígida e as restrições são maleáveis, podendo eventualmente ser violadas de acordo com a sua importância relativa.

Globalmente a abordagem neuronal demonstra algumas potencialidades inovadoras, não pretendendo porém, competir com os métodos clássicos de resolução de problemas de optimização, já que o contexto é bastante diferente e os condicionalismos associados à implementação computacional dos modelos neuronais são diversos. Como exemplo, o facto de existir um número reduzido de computadores com processamento em paralelo, obriga a simulação destes modelos em computadores convencionais com excessivos tempos computacionais.

No que respeita à validade do modelo proposto para o futuro desenvolvimento de um sistema de resolução do problema de (E.H.E.) nas generalidades das instituições escolares nacionais, os resultados foram considerados satisfatórios, sendo ainda necessários diversos melhoramentos no modelo com vista à sua implementação prática.

Como orientações para futuros trabalhos neste campo podemos indicar em primeiro lugar a elaboração de um sistema automático de definição de parâmetros de inicialização, responsável pelo teste e atribuição automática do valor inicial dos ponderadores associados a cada parcela da função energia e dos parâmetros globais  $\Delta\tau$  e  $G_{lim}$ . Dos ensaios efectuados na resolução dos problemas propostos nesta dissertação foi-nos possível detectar a existência de algumas relações entre as características

particulares do problema de (E H E ) e os valores adequados de inicialização do modelo pelo que seria interessante de futuro um estudo nesta área

Em segundo lugar o sucesso de uma aplicação prática no âmbito da (E H E.) passa necessariamente pelo desenvolvimento de uma interface flexível para introdução, modificação e saída de dados para o utilizador

Por último, julgamos que seria aconselhável, de futuro, o estudo pormenorizado do software de simulação e do acompanhamento do desenvolvimento de novas técnicas de implementação computacional das redes neurais em computadores convencionais, com vista à melhoria da sua performance

- Hertz, J.; Krogh, A.; Palmer, R.;** (1991) *Introduction to the theory of neural computation*. Addison-Wesley Publishing Company, Massachusetts
- Hopfield, J.;** (1982) "Neural networks and physical systems with emergent collective computational ability". *Proceedings of the National Academy of Sciences, U.S.A.* Vol 79, pp. 2554-2558
- Hopfield, J.;** (1982) "Neurons with graded response have collective computational properties like those two-state neurons". *Proceedings of the National Academy of Sciences, U.S.A.* Vol 81, pp. 3088-3092
- Hopfield, J.; Tank, D.;** (1985) "Neural computation of decisions in optimization problems". *U.S.A.* Vol 79, pp. 2554-2558. *Biological Cybernetics*, Vol 52, pp. 141-152
- Horst, A.; Laporte, G.;** (1987) "Combinatorial optimization problems with soft and hard requirements". *Journal of Operations Research Society*, Vol. 38, Nº9, pp. 785-795
- Johnson, D.;** (1990) "Timetabling university examinations". *Operational Research Society*, Vol 41, Nº1, pp. 39-47
- Kiaer, L.; Yellen, J.;** (1992) "Weighted graphs and university course timetabling". *Computers and Operations Research*, Vol 19, Nº1, pp. 59-67
- Knauer, B.;** (1974) "Solution of a timetable problem". *Computers and Operations Research*, Vol 1, pp. 363-375
- Laporte, G.; Desroches, S.;** (1986) "Examination timetabling by computers". *Computers and Operations Research*, Vol 11, Nº4, pp. 351-360
- McCulloch, W.; Pitts, W.;** (1943) "A logical calculus of the ideas immanent in nervous activity". *Bulletin of Mathematical Biophysics*, Vol 5, pp. 115-133
- Mehta, N.;** (1981) "The application of a graph coloring method to an examination scheduling problem". *Interfaces*, Vol. 11, Nº5, pp. 57-64
- Minsky, M.; Papert, S.;** (1969) "Perceptrons". Mitpress, Cambridge
- Mulvey, J.;** (1982) "A classroom time assignment model". *European Journal of Operational Research*, Vol 9, Nº1, pp. 64-70
- Ramanujam, J.; Sadayappan, P.;** (1988) "Optimization by neural networks". *Proceedings of the IJCNN, Second International Neural Networks Conference*, Vol 2, pp. 325-332
- Romero, B.;** (1982) "Examination scheduling in a large engineering school: a computer assisted participative procedure". *Interfaces*, Vol 12, Nº2, pp. 17-24



- Sharda, R.;** (1994) "Neural Networks for the MS/OR analyst: an application bibliography", *Interfaces*, Vol 24, Nº2, pp 116-130
- Tripathy, A.;** (1984) "School timetabling - A case in a large binary linear integer programming", *Management Science*, Vol 30, Nº12, pp 1473-1480
- Wilson, G.; Pawley, G.;** (1988) "On the stability of the travelling Salesman Problem algorithm of Hopfield and Tank", *Biological Cybernetics*, N 58, pp 63-70
- Yu, T.;** (1990) "Timetable scheduling using network algorithms", *Proceedings of the IJCNN International Joint Conference on Neural Networks, San Diego, California*, Vol 1, pp 270-284